त्रिकोण नगरीसह भूमितीची विविधता

लेखक : प्रा.डॉ.सदाशिव देव

अनुक्रमणिका

प्रस्तावना 3

1. शालेय भूमितीतील त्रिकोणाचा अभ्यास 4
2. त्रिकोणाच्या अभ्यासासाठी काही सूत्रे 10
3. त्रिकोणाची परिमिती आणि क्षेत्रफळ 16
4. काटकोन त्रिकोण 19
5. एक भूमितीय प्रश्न : अंदाज बांधणी 22
6. त्रिकोण नगरीतील एक कुटुंब 26
7. काठीचे तुकडे आणि त्रिकोण निर्मिती 30
8. टॅक्सी - भूमिती 35
9. उत्क्रांत भूमितीच्या काही शाखा 50

प्रस्तावना

भूमिती विषयाच्या शोधाचा मान ग्रीक देशातील गणितज्ञ युक्लिडला दिला जातो. त्याचा काळ इ.स. पूर्व 5 वे शतक आहे. पण युक्लिडच्या अगोदर काही गणितज्ञ होऊन गेले व त्यांनी भूमितीची काही प्रमेये, सूत्रे शोधून काढली होती. भारतात इ.स.पूर्व 2800 या काळात शूल्बसूत्रे हा संस्कृत भाषेतील ग्रंथ लिहिला गेला, त्यात भूमिती विषयाचा अभ्यास केलेला आढळतो. ग्रीस देशातच युडोक्सस (Eudoxus) या, इ.स.पूर्व 1000 काळात झालेल्या गणितज्ञाने भूमितीची काही सूत्रे शोधली होती. युक्लिडने त्याकाळी माहीत असलेली भूमितीची सूत्रे संपादित करून 'द एलेमेंटस्' (The Elements) या नावाचे भूमितीचे पुस्तक लिहिले, व ते 2000 वर्षापेक्षा जास्त काळ क्रमिक पुस्तक म्हणून लोकप्रिय झाले. त्याने भूमितीत काही भरही घातली होती.

'भूमिती' या संस्कृत भाषेतील शब्दाची फोड, 'भू' म्हणजे जमीन, पृथ्वी आणि 'मिती' म्हणजे मोजमाप अशी आहे. इंग्रजीतील "Geometry'या शब्दाची फोड Geo आणि metry अशी व त्या शब्दांचा अर्थही तोच आहे. जगातील विविध वस्तूंचे आकारमान, घरांच्या, रस्त्यांच्या रचना, नगरनियोजन, डोंगर, पर्वत, नद्या, वनस्पती सृष्टी व त्यातील आकार, आकृत्या, जमिनीचे क्षेत्रफळ, वस्तूंचे घनफळ, त्यांची लांबी, रुंदी, उंची आणि जाडी अशा विविध प्रकारांचा अभ्यास भूमितीत समाविष्ट होतो.

भूमितीचा विचार बिंदू आणि रेषा या दोन मूलभूत संकल्पनांपासून सुरू होतो. शाळेत बिंदू आणि रेषा यांची ओळख करून दिली जाते. एवढी माहिती ही पुस्तिका वाचण्यास पुरेशी आहे.

बिंदू आणि रेषा यांची ओळख झाली की नंतर भूमितीतील सर्वात सोपी बहुभुजाकृती म्हणजे 'त्रिकोण' होय. खरे तर, त्रिकोणाचा अभ्यास ही भूमिती विषयाची सुरवातच. तीन भुजा व तीन कोन असलेली ही आकृती काही क्षेत्रफळ बंदिस्त करते. ही आकृती शिकतानाच ती बहुगुणी असल्याचे लक्षात येते. शालेय अभ्यासक्रमात त्रिकोणाची जी माहिती आपल्याला होते व नंतर ही पुस्तिका वाचण्यासाठी उपयुक्त होते ती एका विभागात संक्षिप्तपणे दिली आहे. या आकृतीची बरीच ओळख क्रमिक पुस्तकातून दिलेली नसते. अशी माहिती 'त्रिकोणनगरीसह भूमितीची विविधता' या पुस्तिकेत करून देण्याचा प्रयत्न केला आहे. त्रिकोण नगरीतील काही मोठ्या रस्त्यांनी जाऊन या नगरीची ओळख येथे करून दिली आहे. या नगरीतील लहान रस्ते, गल्ल्या, बोळ यांच्यामधून फिरुन माहिती करुन घेतली असती तर या पुस्तिकेचा ग्रंथच झाला असता, ते येथे टाळले आहे.

त्रिकोणासारख्याच अन्य बहुभुजाकृती, वर्तुळ, लंबवर्तुळ, अशा अनेक आकृत्या आपल्या ओळखीच्या असतीलच पण त्यांचा अभ्यास येथे अपेक्षित नाही. तरी देखील या पुस्तिकेच्या शेवटच्या दोन विभागात त्रिकोण विषयाच्या पलीकडे जाऊन भूमितीचा जो विस्तार आता झाला आहे व होत आहे त्याची थोडक्यात ओळख करुन दिली आहे. शिक्षक आणि विद्यार्थ्यांना ही माहिती आधी असेल तर त्यांच्याही कल्पनांना पंख फुटतील. एक मात्र लक्षात घेतले पाहिजे. की, भूमितीचा अभ्यास सर्व वैज्ञानिक शाखांना व्यापून उरला आहे, त्यामुळे शालेय पातळीवरच तो पक्का रुजायला हवा.

गोवा विद्यापीठातील डॉ.यशवंत वालावलीकर आणि मडगाव येथील चौगुले महाविद्यालयाचे उपप्राचार्य प्रा.रामकृष्ण खंडेपारकर यांनी मला हवी असलेली माहिती पुरवली याबद्दल त्यांचे मी आभार मानतो.



अशी पुस्तिका लिहिण्याचा आग्रह श्री. नागेश शंकर मोने यांनी केला. यानिमित्ताने मी लिहिलेले हस्तलिखित प्रा.वसंत गजानन टिकेकर यांनी वाचून त्यात सुधारणा सुचविल्या. या दोघांचे मी मन:पूर्वक आभार मानतो.

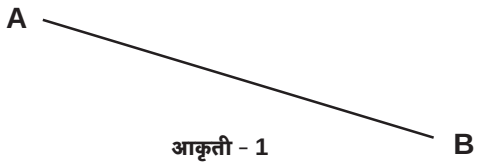
सदाशिव देव
12, प्रेसी बिल्डिंग, मळा,
पणजी, (403001), गोवा

1. शालेय भूमितीतील त्रिकोणाचा अभ्यास

शाळेत तिसऱ्या, चौथ्या इयत्तेत असताना विद्यार्थ्यांना भूमितीची ओळख करुन दिली जाते. बिंदू, रेषा, त्रिकोण, चौकोन आणि वर्तुळ या आकृत्या क्रमाने नंतर शिकवल्या जातात. भूमितीचा अभ्यास मूलत: आकृत्यांच्या माध्यमातून केला जातो. बिंदूचे वर्णन ज्याला लांबी नाही, रुंदी नाही आणि जाडी नाही असे सर्वसाधारणपणे केले जाते. तरीपण अतिशय बारीक टोक असलेली पेन्सिल वापरून आपण बिंदूचे चित्र प्रतलावर (कागद, पाटी) काढतो. हे चित्र तसे अंदाजे काढलेले असते कारण कागदावर काढलेल्या बिंदूला देखील अगदी सूक्ष्म का होईना लांबी, रुंदी आणि जाडी असतेच. मनात असलेले बिंदूचे चित्र प्रत्यक्ष कागदावर रेखाटले की ते अंदाजेच बरोबर असते. पण व्यवहाराच्या पातळीवर आपण असे चित्र किंवा आकृती बिंदू म्हणून मान्य करतो. भूमितीच्या अभ्यासाची सुरवात बिंदूपासून होते. आपल्याला उपयुक्त असणारी भूमिती क्रमाने खाली दिली आहे.

(1) अंतर

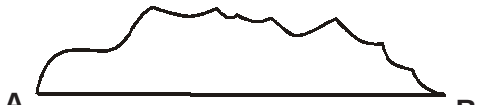
A आणि B हे दोन बिंदू एकाच प्रतलावर घेतले तर त्यांच्यामधील सर्वात कमी अंतर त्यांना जोडणाऱ्या सरळ रेषेने व्यक्त केले जाते. खाली काढलेल्या तीन आकृत्या पहा.



आकृती - 1



आकृती - 2



आकृती - 3

A याठिकाणी आपले घर आहे आणि B पाशी शाळा आहे असे समजू. घरापासून शाळेत जाण्यासाठी वेगवेगळे मार्ग परिस्थितीनुरुप असू शकतात.

आकृती -1 मध्ये घर आणि शाळा यातील अंतर सर्वात कमी आहे. AB हा येथे सरळ मार्ग आहे. आकाशात जसा कावळा उडत जाईल (as the crow flies) तो हा मार्ग आहे.

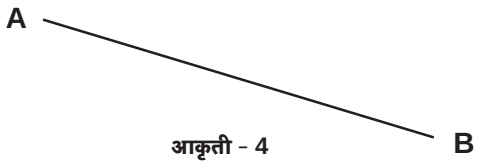
आकृती -2 घर आणि शाळा यात एखादा तलाव बांधलेला असेल तर मग वळसा घ्यावा लागतो, हा मार्ग जास्त लांबीचा असतो.

आकृती-3 शाळा आणि घर यामधील मार्ग खांचखळग्यांनी व्यापलेला असेल तर हा AB मार्ग घ्यावा लागतो. येथेही A आणि B मधील अंतर सरळ रेषेवरील अंतरापेक्षा जास्त असते.

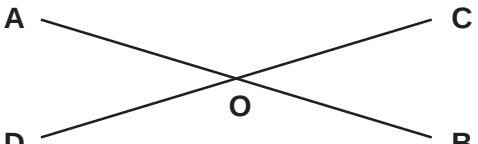
A पासून B पर्यंत जाण्यासाठी असे किती मार्ग असू शकतील ? असे विचारले तर या प्रश्नाचे उत्तर आहे, अनंत ! येथे तीनच मार्ग दाखवले आहेत. या माहितीचा उपयोग आपण नंतर पुढे करणार आहोत.

(2) सरळ रेषा

सरळ रेषेसंबंधी काही माहिती आपल्याला आहे.



आकृती - 4



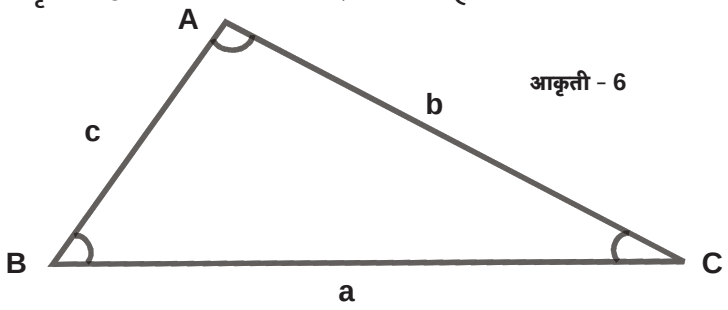
आकृती - 5

आकृती-4 प्रतलावर असलेले A आणि B बिंदू सरळ रेषेने जोडले आहेत. ही आकृती पाहिल्यावर आपल्या लक्षात येते की प्रतलावर घेतलेल्या दोन बिंदूतून जाणारी फक्त एकच रेषा असते,

आकृती - 5 AB आणि CD या दोन सरळ रेषा एकमेकांना 0 या बिंदूत छेदतात. याचा अर्थ दोन सरळ व छेदणाऱ्या रेषांवर एकच समान (सामाईक) बिंदू 0 असतो. वर बिंदू आणि रेषा यासंबधी दोन विधाने केली आहेत. एकात दोन बिंदू व एक रेषा आहे तर दुसऱ्यात दोन रेषा व एक बिंदू आहे. या संबधाला एकमेकांची द्वैत (Dual) विधाने म्हणतात. वर केलेली विधाने आकृती पाहिल्यावर सहज लक्षात येतात. पण त्यांच्याच उपयोगाने भूमितीच्या काही प्रगत शाखा निर्माण झाल्या आहेत. छोट्याशा विषयात आशय कधी । मोठा किती आढळे ॥' या काव्यपंक्तीची आठवण मला ही विधाने वाचून झाली. पाहू या हे कितपत खरे आहे !

(3) त्रिकोण :-

खाली काढलेली आकृती - 6 आपल्या सर्वांच्या परिचयाची आहे.



आकृती - 6

या त्रिकोण आकृतीसंबंधी आवश्यक त्या माहितीची नोंद करू.

i) या त्रिकोणाचे A, B, C हे शिरोबिंदू आहेत.

ii) BC, CA, AB या तीन भुजा आहेत.

iii) या तीन भुजांची लांबी अनुक्रमे a, b, c या चिन्हांनी ओळखली जाते.

iv) त्रिकोणाचे तीन कोन $\angle BAC = \angle A$, $\angle CBA = \angle B$ आणि $\angle ACB = \angle C$ असे ओळखले जातात.

v) त्रिकोणांच्या तीन भुजांनी आतील बाजूस काही क्षेत्रफळ बंदिस्त केले जाते. त्याला त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ म्हणतात.

vi) आकृती - 6 Δ ABC किंवा Δ BCA, अगर Δ CAB या चिन्हांनी ओळखली जाते. काही वेळा आकृती Δ ABC = (a, b, c) अशीही लिहिली जाते. अर्थात (a, b, c), (b, c, a) आणि (c, a, b) ही सर्व त्रिकूटे एकच त्रिकोण दर्शवतात. a, b, c या संख्या नेहमीच धन असतात.

vii) जर A, B आणि C हे बिंदू सरळ रेषेत असतील तर ABC त्रिकोण तयार होईल पण हा त्रिकोण अभ्यासाच्या दृष्टीने निरूपयोगी असतो. अशा त्रिकोणांना 'क्षुल्लक' त्रिकोण (Trivial Triangle) म्हणतात.

viii) त्रिकोणाच्या तीन भुजा दिलेल्या असतील तर एकच एक त्रिकोण निश्चित होतो. जर त्रिकोणाचे तीन कोन दिले तर मात्र एकच एक त्रिकोण निश्चित होत नाही. आकृती 6 (A) पहा. पण त्रिकोणाचे एक कुटुंब मात्र निश्चित करता येते. त्रिकोण निश्चित करण्यासाठी आणखीही काही वेगळी विधाने देता येतील. ती सर्व विधाने येथे दिलेली नाहीत.



आकृती - 6A

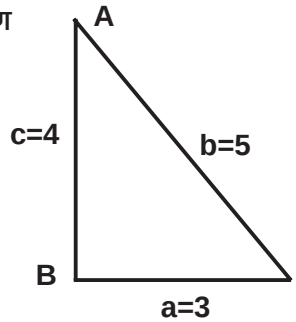
ix) आकृती - 6 मध्ये Δ ABC काढला आहे. तेथे Δ PQR, Δ XYZ ही चिन्हे सुद्धा वापरता येतील. गणित क्षेत्रात परंपरेला स्थान नाही.

(4) त्रिकोणांचे गुणधर्म :-

(अ) भुजांच्या लांबीवर आधारित वर्गवारी :
त्रिकोणाच्या सर्व भुजा समान असतील तर तो त्रिकोण **'समभुज त्रिकोण'** असतो.
त्रिकोणाच्या दोन भुजा समान असतील व तिसरी भुजा असमान असेल तर तो **'समद्विभुज त्रिकोण'** असतो.
त्रिकोणाच्या सर्व भुजा असमान असतील तर तो **'विषमभुज त्रिकोण'** असतो.

(आ) कोनावर आधारित त्रिकोणांची विभागणी :
त्रिकोणातील सर्व कोन लघुकोन असतील तर तो **'लघुकोन त्रिकोण'** असतो.
त्रिकोणातील एक कोन 90^0 चा असेल तर तो **'काटकोन त्रिकोण'** असतो. (येथे बाकीचे दोन कोन लघुकोन असतात.)
त्रिकोणातील एक कोन 90^0 पेक्षा मोठा असेल तर तो **'विशालकोन त्रिकोण'** असतो. (येथे बाकीचे दोन कोन लघुकोन असतात.)

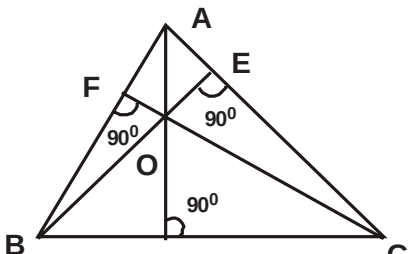
(इ) i) त्रिकोणाच्या तीन कोनांची बेरीज 180^0 असते.
ii) त्रिकोणाची एक बाजू वाढवली तर होणारा बाह्यकोन राहिलेल्या दोन अंतर्गत कोनांच्या बेरजेबरोबर असतो.
iii) समद्विभुज त्रिकोणात समान बाजूंच्या समोरील कोन सारखे असतात. या विधानाचा व्यत्यासही सत्य आहे.
iv) समभुज त्रिकोणात सर्व कोन समान (60^0 चे) असतात. या विधानाचा व्यत्यासही सत्य आहे.
v) त्रिकोणातील सर्वात मोठ्या कोनासमोरील भुजा, सर्व भुजांत मोठी असते. या विधानाचा व्यत्यास सत्य आहे.
vi) त्रिकोणाच्या सर्व भुजा जर नैसर्गिक संख्या एवढ्या लांबीच्या असतील तर त्याला **'नॉर्मल त्रिकोण'** म्हणतात.
vii) त्रिकोणाच्या सर्व भुजा नैसर्गिक संख्या असतील व त्याचे क्षेत्रफळ नैसर्गिक संख्या असेल तर त्याला **'हेरॉन त्रिकोण'** म्हणतात.
viii) ज्या हेरॉन त्रिकोणात परिमिती = 2 (क्षेत्रफळ) असेल तर त्याला **'परिपूर्ण त्रिकोण'** म्हणतात.
उदाहरणार्थ खाली काढलेला त्रिकोण



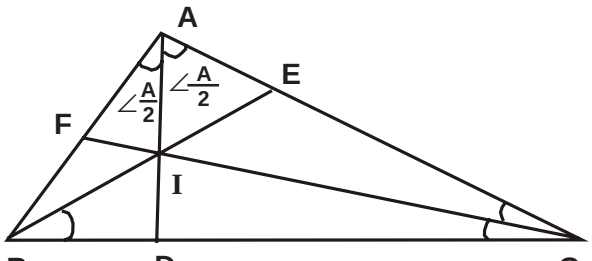
आकृती - 7

आकृती - 7 मधील (3, 4, 5) हा त्रिकोण नॉर्मल, हेरॉन आणि परिपूर्ण त्रिकोण आहे. त्यासाठी (vi), (vii) व (viii) या व्याख्या लागू होतात का ? ते तपासावे लागेल.

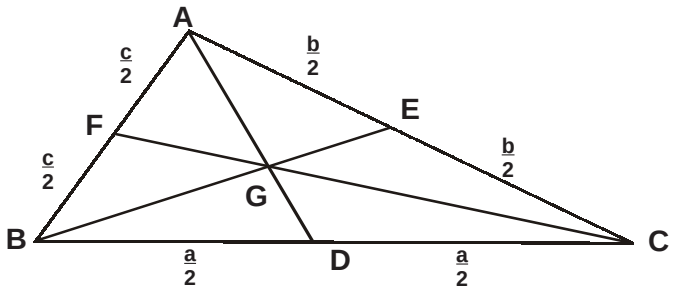
ix) त्रिकोणांची ओळख आणखी काही बिंदूनी होते. खाली दिलेल्या तीन आकृत्या पहा :



आकृती - 8



आकृती - 9



आकृती - 10

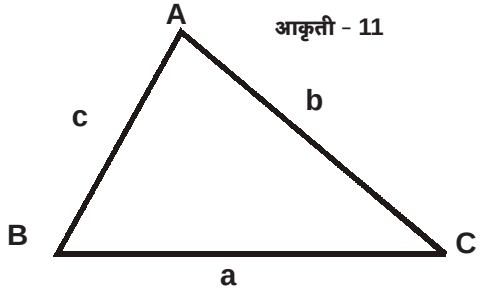
आकृती - 8 मध्ये AD, BE व CF या BC, CA व AB या रेषेवरील लंब रेषा आहेत. या तीनही लंबरेषा 0 या बिंदूत मिळतात. 0 या बिंदूला **'शिरोलंब संपात बिंदू'** म्हणतात.

आकृती - 9 मध्ये AD, BE व CF या रेषा अनुक्रमे A, B, व C यांच्या कोनदुभाजक रेषा म्हणतात. या तीनही रेषा समान बिंदू I मध्ये मिळतात. I याला कोनदुभाजकांचा **'द्विभाजक संपात बिंदू'** म्हणतात.

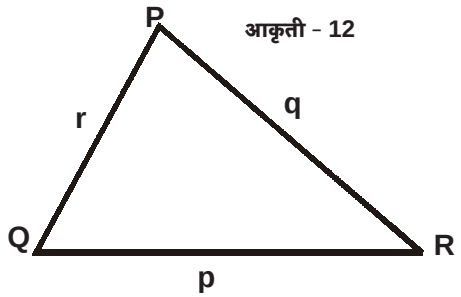
आकृती - 10 मध्ये D, E व F हे बिंदू अनुक्रमे BC, CA व AB या भुजांचे मध्यबिंदू आहेत. AD, BE व CF या रेषांना त्रिकोणाच्या मध्यगा रेषा म्हणतात व त्या सर्व G या बिंदूत मिळतात. G या बिंदूला **'मध्यगा संपात बिंदू'** म्हणतात. त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य G अक्षराने दाखविला जातो.

वर दिलेल्या तीन बिंदू O, I व G संबंधी अनेक गुणधर्म भूमितीत प्रमेये म्हणून सिद्ध केलेली आहेत.

x) **समरूप त्रिकोण :-** दोन त्रिकोणांच्या सर्व बाजू अनुक्रमाने समान लांबीच्या असतील तर त्यांना **'एकरूप त्रिकोण'** म्हणतात.

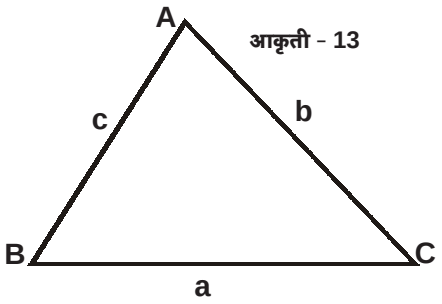


आकृती - 11

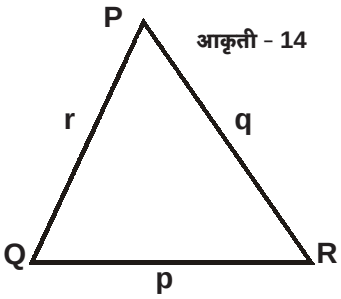


आकृती - 12

आकृती -11 मध्ये असलेला Δ ABC व आकृती - 12 मध्ये असलेला त्रिकोण यांच्यामध्ये जर a = p, b = q आणि c = r आहे. हे त्रिकोण एकरूप आहेत.



आकृती - 13



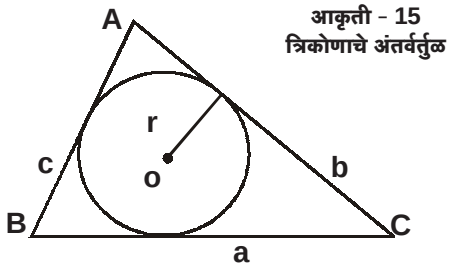
आकृती - 14

वरील आकृतीतील (आकृती - 13 व 14)दोन त्रिकोण सारखे दिसतात पण त्यांच्यात भुजा मात्र असमान आहेत. जर या भुजा समप्रमाणात असतील तर Δ ABC व Δ PQR समरूप त्रिकोण आहेत.

समरूप त्रिकोणांसंबंधी काही प्रमेये सिद्ध केलेली आहेत. अशा प्रकारच्या त्रिकोणांमुळे त्रिकोणनगरीतील काही कुटुंबे निश्चित करता येतात. अशा कुटुंबात काही समान गुणधर्म असतात. उदाहरणार्थ ∠A = ∠P, ∠B = ∠Q, ∠C = ∠R. थोडी असमानताही असतेच. उदाहरणार्थ Δ ABC आणि Δ PQR यांची क्षेत्रफळे असमान आहेत.

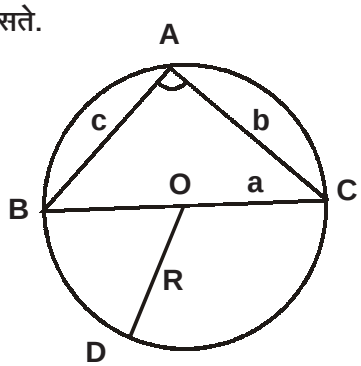
xi) **त्रिकोण आणि वर्तुळे :-** त्रिकोणाचा अभ्यास प्रगत करण्यासाठी काही वर्तुळे महत्त्वाची ठरली आहेत. त्यापैकी 5 वर्तुळांचा उल्लेख खाली केला आहे.

अ) आकृती - 15 पहा. प्रत्येक त्रिकोणाच्या आतील बाजूस, त्रिकोणाच्या तीनही भुजा स्पर्शरेषा असणारे वर्तुळ काढता येते. असे वर्तुळ फक्त एकच असते. त्याला त्रिकोणाचे **'अंतर्वर्तुळ'** असे म्हणतात. या वर्तुळाची त्रिज्या, त्रिकोणाच्या भुजांच्या लांबीवर अवलंबून असते. अंतर्वर्तुळाची त्रिज्या r या चिन्हाने दाखवतात.



आकृती - 15
त्रिकोणाचे अंतर्वर्तुळ

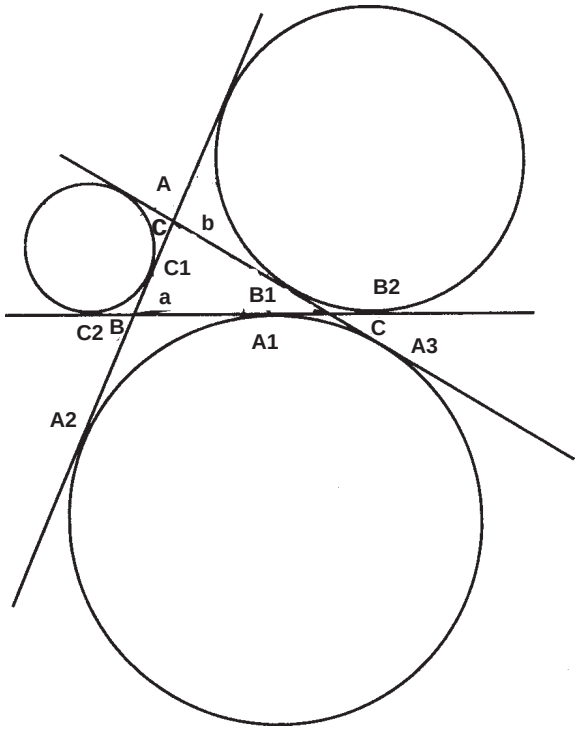
आकृती - 16 तील वर्तुळ त्रिकोणाचे शिरोबिंदू A,B,C मधून काढले आहे. यामुळे त्रिकोणाने बंदिस्त केलेले क्षेत्रफळ वर्तुळाच्या आत असते. याला त्रिकोण ABC चे **'परिवर्तुळ'** म्हणतात. या वर्तुळाची त्रिज्या R या चिन्हाने दाखवतात व प्रत्येक त्रिकोणाला असे परिवर्तुळ एकच असते.



आकृती - 16
परिवर्तुळ

ज्या आकृतीत AB, BC आणि CA यापैकी एक भुजा वर्तुळाचा व्यास असतो तेंव्हा या व्यासासमोरील कोन नेहमीच काटकोन असतो. आकृती - 16 त 0 हा परिवर्तुळाचा मध्य बिंदू आहे. येथे $\angle BAC = 90^0$ असतो.

समभुज त्रिकोणाच्या बाबतीत r आणि R यात एक विशिष्ट संबंध आढळतो; $2r = R$ असा हा संबंध होय.



आकृती - 17 - त्रिकोणाची तीन बहिर्वर्तुळे

आकृती - 17 मध्ये Δ ABC च्या क्षेत्रफळाच्या बाहेर काढलेली तीन वर्तुळे दिसतात. ही वर्तुळे Δ ABC च्या तीनही भुजांना स्पर्श करतात. आवश्यक तेथे त्रिकोणाच्या भुजा वाढवल्या आहेत. $\angle A$ समोरील वर्तुळ त्रिकोणाच्या भुजांना A_1, A_2, A_3 या बिंदूत स्पर्श करते. या वर्तुळाची त्रिज्या r_a या चिन्हाने दाखवतात. आता $\angle A$ समोरील वर्तुळाबद्दल जे वर्णन केले तसेच $\angle B$ व $\angle C$ या कोनासमोरील वर्तुळांबद्दल करता येईल. या वर्तुळांच्या त्रिज्या अनुक्रमे मग r_b व r_c आहेत असे म्हणता येईल. प्रत्येक त्रिकोणाला अशी फक्त तीन वर्तुळे असतात. या वर्तुळांना Δ ABC त्रिकोणाची बहिर्वर्तुळे म्हणतात.

आकृत्या - 15,16 आणि 17 मध्ये आपण एकूण 5 वर्तुळे काढली आहेत. त्या वर्तुळांच्या त्रिज्या r, R, r_a, r_b आणि r_c या चिन्हांनी व्यक्त केल्या आहेत. ही वर्तुळे Δ ABC शी संबंधीत आहेत त्यामुळे या पाचही त्रिज्या त्रिकोणाच्या भुजा a, b, c यांच्या लांब्यांवर अवलंबून असतात.

याशिवाय Δ ABC च्या अंतर्वर्तुळाची त्रिज्या (r) आणि बाह्यवर्तुळांच्या त्रिज्या r_a, r_b, r_c यांच्यातही संबंध आढळतो.

$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$ असा हा संबंध होय.

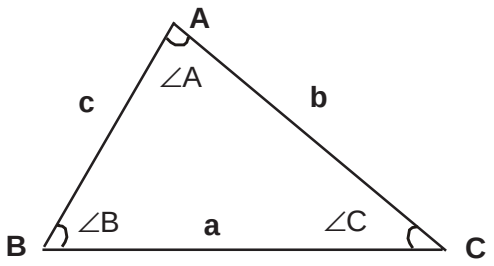
Δ ABC समभुज असल्यास आणखी एक संबंध असतो. तो असा $r_a = 3r$.

समभुज त्रिकोणात $r_a = r_b = r_c$ असते.

❑ ❑ ❑

2. त्रिकोणाच्या अभ्यासासाठी काही सूत्रे

त्रिकोणाची परिपूर्ण ओळख त्यांच्यासंबंधीच्या माहितीतून होते. आकृती - 18 पहा.



आकृती - 18

त्रिकोणाच्या माहितीत त्याच्या भुजांच्या लांब्या (a, b, c) कोनांचे माप (∠A, ∠B, ∠C), क्षेत्रफळ (K), त्रिकोण संबंधीत 5 वर्तुळांच्या त्रिज्या (r, R, r_a, r_b, r_c) या संख्यांचा समावेश होतो. या सर्व संख्या एकमेकांशी नाते बाळगून असतात. उदाहरणार्थ, त्रिकोणाच्या भुजांच्या लांब्या माहीत असतील तर सूत्रांच्या सहाय्याने अन्य संख्या काढता येतात. अशा सूत्रांची यादी खाली दिलेली आहे. ही सूत्रे शालेय अभ्यासक्रमात शिकवली जात असतील किंवा नसतील, त्यांच्या सिद्धता माहीत असतील किंवा नसतील, आपण ही सूत्रे सिद्ध आहेत असे गृहीत धरू. sine, cosine, tangent वगैरे त्रिकोणमितीय फले आहेत.

अ) Law of Sines : $\frac{\text{Sin A}}{a} = \frac{\text{Sin B}}{b} = \frac{\text{Sin C}}{c}$

आ) Law of Cosines :

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$

म्हणजेच

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$

$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},$

$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

इ) त्रिकोणाच्या भुजांच्या लांब्या a, b, c आहेत. त्रिकोणाची परिमिती a + b + c = 2s असेल तर अर्धपरिमिती

$\frac{a + b + c}{2} = s$ असते. त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ K यासाठी $K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

हे सूत्र सिध्द आहे. यालाच हेरॉनचे सूत्र म्हणतात.

(i) अंतर्वर्तुळाची त्रिज्या $r = \frac{K}{s}$;

(ii) बाह्य वर्तुळांच्या त्रिज्या

$r_a = \frac{K}{s-a}$, $r_b = \frac{K}{s-b}$, $r_c = \frac{K}{s-c}$

या सूत्रांनी मिळतात.

तसेच, खालील सूत्रे सिध्द आहेत.

$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$;

$r_a + r_b + r_c = r + 4R$;

$R = \frac{abc}{4K}$;

$K = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$;

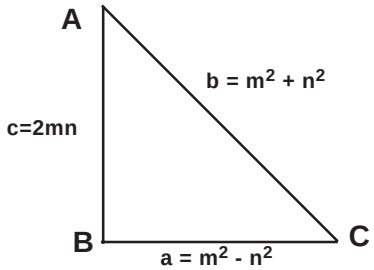
$a = b \cos C + c \cos B$;

$b = c \cos A + a \cos C$;

$c = a \cos B + b \cos A$;

$\tan \frac{A}{2} = \frac{r}{s-a}$, $\tan \frac{B}{2} = \frac{r}{s-b}$, $\tan \frac{C}{2} = \frac{r}{s-c}$

या सूत्रांचा उपयोग कसा केला जातो त्यासाठी खाली काही उदाहरणे सोडवून दाखवली आहेत.



Δ ABC मध्ये तीन भुजांच्या लांब्या a, b, c अनुक्रमे $m^2 - n^2$, $m^2 + n^2$ व $2mn$ दिलेल्या आहेत. येथे m आणि n या नैसर्गिक धन संख्या व $m > n$ आहे. परिमिती $2s = (m^2 - n^2) + (m^2 + n^2) + 2mn = 2m(m + n)$ आहे. सूत्राचा उपयोग करून क्षेत्रफळ

$K = mn(m^2 - n^2)$ सिद्ध होते. तसेच

$r = \frac{K}{s} = \frac{mn(m^2 - n^2)}{m(m+n)} = n(m-n)$;

$r_a = \frac{K}{s-a} = \frac{mn(m^2 - n^2)}{m(m+n) - (m^2 - n^2)} = m(m-n)$;

$r_b = \frac{K}{s-b} = m(m+n)$;

$r_c = \frac{K}{s-c} = n(m+n)$; होय.

r, r_a, r_b, r_c या सर्व नैसर्गिक संख्या आहेत. आणखी

$r + r_a + r_b + r_c = 2s = a + b + c$, होय.

वर दिलेला त्रिकोण काटकोन त्रिकोण आहे हे सहज लक्षात येते; कारण येथे $b^2 = a^2 + c^2$ आहे. या उदाहरणाच्या निमित्ताने अनंत त्रिकोणांचा संच आपल्याला मिळाला.

उदाहरण - 2 :

उदाहरण 1 मध्ये जर $m = 2$ व $n = 1$ या संख्या घेतल्या तर आपल्याला $a = 3$, $c = 4$ व $b = 5$ मिळतात व $(3,4,5)$ हा काटकोन त्रिकोण आहे हे आपल्याला माहीत आहे. या त्रिकोणात आता $r = 1$, $r_a = 2$, $r_b = 6$, $r_c = 3$ व $R = 5/2$ हे मग सहज सिद्ध करता येते व $r + r_a + r_b + r_c = 1 + 2 + 6 + 3 = 12 = a + b + c$ ही समानता सिद्ध होते.

या सूत्रांच्या आधाराने या त्रिकोणाचे कोन निश्चित करता येतात. येथे

$K = \frac{1}{2}$ bc Sin A हे सूत्र योजून

$6 = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 \text{ Sin A} = 10 \text{ Sin A}$ म्हणून $\text{Sin A} = \frac{3}{5}$ आहे.

तसेच $\text{Sin C} = \frac{4}{5}$ असे दाखवता येईल.

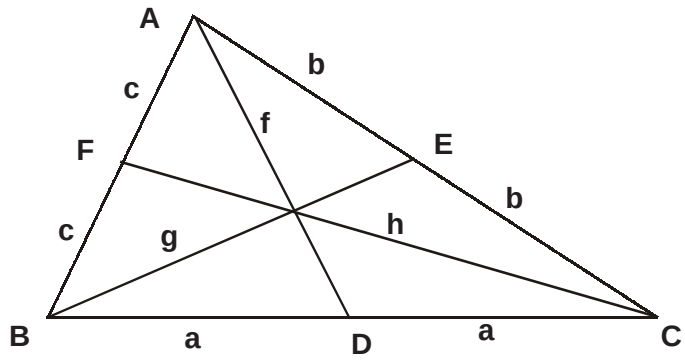
या त्रिकोणाच्या तीन्ही लंबरेषांची, तीन्ही मध्यगांची व तीन्ही कोनद्विभाजकांची लांबी दिलेल्या सूत्रांच्या उपयोगाने काढता येईल.

उदाहरण - 3

एका त्रिकोणाच्या तीन बाजू 2a, 2b आणि 2c लांबीच्या आहेत व त्यांच्या मध्यगा f, g, h या लांबीच्या आहेत तर

(1) $\begin{cases} 2b^2 + 2c^2 - a^2 = f^2, \\ 2c^2 + 2a^2 - b^2 = g^2, \\ 2a^2 + 2b^2 - c^2 = h^2, \end{cases}$

ही समानता सिद्ध करा.



या आकृतीत AD ही Δ ABC ची मध्यगा आहे. म्हणून BD = DC = a आहे Δ ABC साठी cosine सूत्र वापरून

$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2\ AB.\ BD \cos B = 4c^2 + a^2 - 4ac \cos B = f^2$

तसेच

$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2\ AC\ .\ DC \cos C = 4b^2 + a^2 - 4ab \cos C = f^2$

बेरजेने

$2\ AD^2 = 2f^2 = 4c^2 + a^2 + 4b^2 + a^2 - 4a\ (c \cos B + b \cos C)$

$= 4c^2 + 4b^2 + 2a^2 - 4a\ (a)$

$= 4c^2 + 4b^2 - 2a^2$ होय.

म्हणून

$f^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$ आहे.

याच पद्धतीने राहिलेल्या दोन्ही राशी सिद्ध होतात. तसेच या (1) मधील राशींचा उपयोग करुन

$$(2)\quad \begin{cases} 2f^2 + 2g^2 - h^2 = 9c^2 \\ 2h^2 + 2f^2 - g^2 = 9b^2 \\ 2g^2 + 2h^2 - f^2 = 9a^2\ ; \end{cases}$$

या राशी सिद्ध होतात. (तपासून पहा). आता (1) व (2) या राशींचा एकत्रित विचार करु. या दोन्ही सूत्रांमध्ये काही सारखेपणा लक्षात येतो. हा गुणधर्म आता लक्षात घेऊ. Δ ABC मध्ये a, b, c, या भुजांच्या लांब्या माहीत असतील तर या त्रिकोणाच्या मध्यगा f, g, h (1) मधील सूत्राने काढता येतात. आता 2f, 2g, 2h या भुजा असलेला त्रिकोण काढा. समानता तत्व (Principle of Symmetry) वापरून असे म्हणता येईल की या नवीन त्रिकोणाच्या मध्यगांची लांबी 3a, 3b, 3c असली पाहिजे. गणितात असे समानता तत्व अनुभवास येते. मग ते योजून, सिद्धता न देता काही नवीन संबंध सिद्ध करता येतात.

समानता तत्वाचा उपयोग दाखवण्यासाठी हे उदाहरण दिले आहे. (1) व (2) या सूत्रांचा उपयोग करून खाली दिलेल्या त्रिकोणांच्या मध्यगांची लांबी काढा.

(i) (a, b, c,) = (158, 127, 131)

(ii) (a, b, c,) = (68, 87, 85)

या प्रश्नांची उत्तरे खाली दिली आहेत.

(i)* f = 204, g = 261, h = 255;

(ii)* f = 158, g = 127, k = 131;

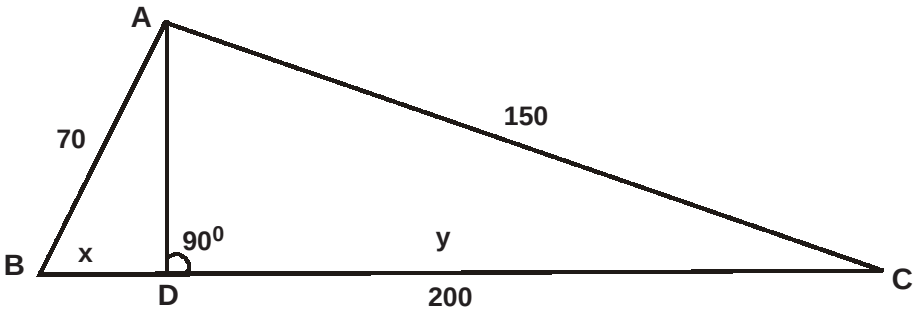
या उदाहरणातील (1) व (2) ही मध्यगांची लांबी काढण्यासाठी सूत्रे म्हणून वापरता येतात.

उदाहरण 3, अपोलोनियसच्या प्रमेयाआधारे देखील सहज सुटते कसे ते पहा.

$2a^2 + 2b^2 = 2d^2 + 2\left(\frac{c}{2}\right)^2$ असे सूत्र वापरा.

उदाहरण - 4

ΔABC मध्ये $AB = 70$, $BC = 200$ व $CA = 150$ आहे. या त्रिकोणांच्या शिरोलंबांची लांबी काढा.



या आकृतीत AD हा शिरोलंब आहे. समजा $x = BD$ व $y = DC$ म्हणजेच $x + y = BD + DC = BC = 200$ होय. आता

$AD^2 + y^2 = 150^2$ व

$AD^2 + x^2 = 70^2$ म्हणून वजाबाकीने

$y^2 - x^2 = (y + x)(y - x) = 200(y - x) = 200(200 - x - x)$

$= 200(200 - 2x) = 150^2 - 70^2 = 17600$ म्हणून

$x = 56$ आहे, आता

$AD^2 = AB^2 - BD^2 = 70^2 - 56^2 = 1764$ म्हणून $AD = 42$ होय.

AD ही लंब रेषा येथे धनपूर्णांक आहे. याच पद्धतीने राहिलेल्या दोन्ही लंबरेषांची लांबी काढता येईल. व या दोन्ही संख्या धनपूर्णांक असतील. (या संख्या काढा.)

उदाहरण - 5

जर m ही नैसर्गिक संख्या असेल तर $2m^2 + 1$, $2m^2 + 2$ आणि $4m^2 + 1$ या बाजू असणाऱ्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ नैसर्गिक संख्या असते हे सिद्ध करा.

येथे दिलेल्या त्रिकोणाची परिमिती

$2s = (2m^2 + 1) + (2m^2 + 2) + (4m^2 + 1) = 8m^2 + 4$ व अर्धपरिमिती.

$s = 4m^2 + 2$ आहे.

आता क्षेत्रफळ काढण्यासाठी आपण हेरॉनचे सूत्र वापरु :

$K^2 = s(s - a)(s - b)(s - c)$

= $(4m^2 + 2)(2m^2)(2m^2 + 1)$ (1)

= $4m^2 (2m^2 + 1)^2$ **म्हणून**

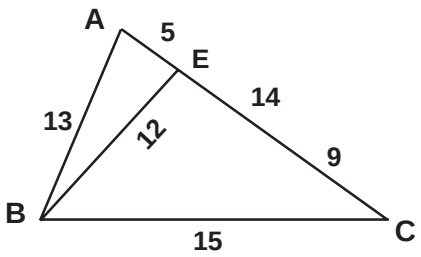
K = $2m(2m^2 + 1)$ **होय.**

येथे K **ही संख्या नैसर्गिक आहे.** m **साठी** 1, 2, 3,..... **अशा अनंत किंमती घेऊन अनंत त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ काढता येईल.**

उदाहरण – 6

(a, b, c,) = (13, 14, 15) **या त्रिकोणाचे वेगळेपण दाखवण्यासाठी या त्रिकोणाच्या शिरोलंबांच्या लांबी काढू.**

त्रिकोणाच्या लंब रेषांच्या लांब्या काढण्याची रीत उदाहरण – 5 **मध्ये दिली आहे. वर दिलेल्या त्रिकोणात** BE **ही लंबरेषा आहे.**



येथे AE = 5 **व** EC = 9 **आहे हे सिद्ध करता येईल. त्यामुळे** BE = 12 **आहे. या त्रिकोणात** BE, AB, AC, BC **या चार रेषांच्या लांब्या अनुक्रमे** (12, 13, 14, 15) **आहेत. या चार धनपूर्णांक सलग** (Cousecutive) **संख्या आहेत.** **त्रिकोण नगरीत हा गुणधर्म असणारा एकच त्रिकोण आहे.**

वर दिलेल्या उदाहरणावरून लक्षात येते की त्रिकोणाच्या तीन भुजा माहीत असतील तर सूत्रांच्या सहाय्याने त्रिकोणाची पूर्ण ओळख करून घेता येते. त्रिकोणाचे तीन कोन दिले तर मात्र असे होत नाही. पण समरुप त्रिकोणांचे कुटुंब निश्चित करता येते.

❑ ❑ ❑

3. त्रिकोणाची परिमिती आणि क्षेत्रफळ

प्रत्येक त्रिकोणाशी, परिमिती आणि क्षेत्रफळ या दोन संख्या निगडीत असतात. या दोन्ही संख्या एकमेकांशी संबंधीत असतात हे त्यासंबंधी माहीत असलेल्या सूत्रावरून सहज लक्षात येते. त्रिकोणासंबंधी ज्ञात असलेली सूत्रे लक्षात राहावीत व सुलभपणे वापरता यावीत म्हणून सर्वसाधारणपणे सर्वांनी एकसारखी चिन्हे उपयोगात आणणे गरजेचे आहे. म्हणून Δ ABC, भूजा a, b, c, क्षेत्रफळ K परिमिती 2s अशी चिन्हे विषयाच्या विश्लेषणासाठी समान असावी लागतात. आता परिमिती आणि क्षेत्रफळ यांचा मेळ घालण्यासाठी आपण μ (उच्चार म्यू, ग्रीक भाषेतील एक अक्षर) हे चिन्ह पुढील लेखनात योजू. येथे

$$\mu = \frac{\text{परिमिती}}{\text{क्षेत्रफळ}} = \frac{2s}{K}$$

म्हणजेच

$2s = \mu K$ (μ ही संख्या धन आहे.)

येथे μ ही संख्या त्रिकोणाच्या परिमितीचे क्षेत्रफळाशी प्रमाण दर्शवते μ संबंधी आता तीन पर्याय विचारात घेऊ :

अ) $\mu < 1$ आ) $\mu = 1$ आणि इ) $\mu > 1$

उदाहरणार्थ : (3, 4, 5) हा त्रिकोण हेरॉन जातीचा आहे असे अगोदर आपण म्हटले आहे. येथे

$2s = 3 + 4 + 5 = 12$, परिमिती व $s = 6$ आहे.

व क्षेत्रफळ $K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$K = \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}$$

$$= \sqrt{36} = 6 \text{ आहे.}$$

म्हणून

$$\mu = \frac{2s}{K} = \frac{12}{6} = 2 > 1 \text{ होय.}$$

तर (13, 14, 15) या त्रिकोणात परिमिती $2s = 42$ व क्षेत्रफळ 84 असल्याने

$$\mu = \frac{2s}{K} = \frac{1}{2} < 1 \text{ होय.}$$

हेरॉन जातीचा त्रिकोण म्हणजे क्षेत्रफळ व परिमिती व बाजू नैसर्गिक संख्या असाव्यात.

आपण आणखी एक उदाहरण घेऊ.

समजा m ही नैसर्गिक संख्या आहे. व त्रिकोणाच्या भुजा $2m^2 + 1$, $2m^2 + 2$, $4m^2 + 1$ या आहेत. आता हेरॉनचे सूत्र उपयोगात आणून या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ K काढू .

या त्रिकोणाची परिमिती

$2s = (2m^2 + 1) + (2m^2 + 2) + (4m^2 + 1)$

$= 8m^2 + 4$

$s = 4m^2 + 2.$

हेरॉनच्या सूत्राप्रमाणे -

$K^2 = s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)$

$= (4m^2 + 2)\,(2m^2 + 1)\,(2m^2)\,(1)$

$= 4m^2\,(2m^2 + 1)^2$

व $K = 2m\,(2m^2 + 1)$.

येथे m ही नैसर्गिक पण कोणतीही संख्या आहे. आता m = 1, 2, 3, 4, 5, 6,..... या संख्या या सूत्रासाठी योजल्या तर त्रिकोणाच्या भुजा (a, b, c,) परिमिती 2s, क्षेत्रफळ K व μ या संख्या प्रत्येक त्रिकोणासाठी काढता येतील व खाली दिलेले कोष्टक तयार करता येईल.

m	त्रिकोण त्रिकूट	परिमिती	क्षेत्रफळ	$u = \frac{\text{परिमिती}}{\text{क्षेत्रफळ}}$
	(a, b, c)	2s	k	
1	(3, 4, 5,)	12	6	2
2	(9, 10, 17)	36	36	1
3	(19, 20, 37)	76	114	0.66
4	(33, 34, 65)	132	264	0.50
5	(51, 52, 101)	204	510	0.40
6	(73, 74, 145)	292	876	0.30
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

कोष्टक - 1 या कोष्टकासंबधी काही विधाने करता येतात.

(अ) वरील कोष्टक m = 7, 8, 9,.....या संख्या वापरुन हवे तसे वाढवता येईल.

(आ) μ च्या रकान्यातील संख्या 2 पासून सुरु होतात पण क्रमाने कमी होत जातात. μ ही नेहमी धन संख्या आहे त्यामुळे $\mu \to 0$ (μ ही संख्या क्रमाने शून्याकडे घसरत जाते) असे म्हणता येते.

μ ही संख्या 2 पेक्षा मोठी असते का ? असा प्रश्न विचारता येईल. यासाठी (2, 2, 2) या त्रिकूटाचा विचार करु. या त्रिकोणाची परिमिती 6 आहे व क्षेत्रफळ $\sqrt{3}$ आहे. त्यामुळे

$$\mu = \frac{\text{परिमिती}}{\text{क्षेत्रफळ}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} > 2$$

एका प्रमेयाने असे दाखवून देता येते की $2\sqrt{3}$ ही μ ची सर्वांत मोठी किंमत आहे. या संख्येपासूनच μ संख्या घरंगळत शून्याकडे जाते. या प्रमेयाने असे सिद्ध करता येते की $\mu > 2\sqrt{3}$ अशी स्थिती असणारा त्रिकोण त्रिकोणनगरीत अस्तित्वात नाही.

वरील कोष्टक - 1 मध्ये (9, 10, 17) या त्रिकूटाने होणाऱ्या त्रिकोणाची परिमिती 36 आहे व क्षेत्रफळही 36 आहे त्यामुळे $\mu = 1$ आहे. मग प्रश्न निर्माण झाला की सर्व त्रिकोणनगरीत परिमिती आणि क्षेत्रफळ समान असणारे हेरॉन त्रिकोण आणखी आहेत का ? या प्रश्नाचा पाठपुरावा व्हाईटवर्थ व बिडल या गणितज्ञांनी केला व त्यांनी शोधून काढले की त्रिकोणनगरीत असे 5 हेरॉन त्रिकोण आहेत की ज्यांची परिमिती आणि क्षेत्रफळ समान आहे. ते असे (5, 12, 13) (6, 8, 10) (6, 25, 29) (7, 15, 20) (9,10,17). या त्रिकोणांची परिमिती व क्षेत्रफळे काढून $\mu = 1$ खरोखरच आहे का ? ते तपासून पहा.

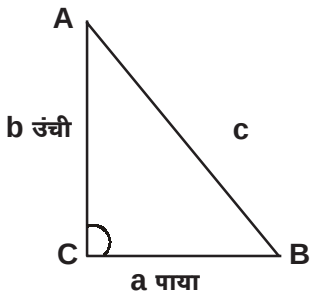
असे नवनवीन प्रश्न गणित संशोधनात साखळी पद्धतीने सतत निर्माण होतात व नवीन पिढीतील शास्त्रज्ञ ते सोडवतात. यामुळे गणिताची बाग फुलत राहते. त्रिकोण आकृती संबंधी असे संशोधन बरेच प्रगत आहे पण चौकोन, पंचकोन, षटकोन....या आकृत्यांबाबत मात्र अजूनही फार माहिती उपलब्ध नाही.

या विभागात μ या प्रमाणासंबंधी माहिती घेऊन काही निष्कर्ष काढले आहेत. आणखी काही नवीन प्रमाणे व्याख्या देऊन त्रिकोणासंबंधी अधिक अभ्यास करता येईल. गणितात संशोधन सतत प्रगत होत असते.

❑ ❑ ❑

4. काटकोन त्रिकोण

काटकोन त्रिकोणांचा अभ्यास त्यातील एक कोन 90^0 चा असल्यामुळे बराच सोपा होतो. तसेच त्रिकोणातील राहिलेले दोन कोन एकमेकांचे कोटिकोन असतात म्हणजे या दोन कोनांची बेरीज 90^0 एवढी असते. अशा त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ 1/2 पाया x उंची या सूत्राने चटकन काढता येते. या सूत्राच्या उपयोगासाठी त्रिकोणाची आकृती पुढील प्रमाणे असावी.



आकृती - 18

आकृती - 18 मधील त्रिकोणात $AC^2 + CB^2 = AB^2$ किंवा $a^2 + b^2 = c^2$ हे सूत्र सिद्ध करता येते. या सूत्राला पायथॉगोरस सिद्धांत असे म्हणतात. हा सिद्धांत भारतीय गणितज्ञांना वैदिक काळापासून माहीत होता असे डॉ. ए. सायडेनबर्ग या गणितज्ञाने 'द ओरिजीन ऑफ मॅथेमॅटिक्स' या शोध निबंधात म्हटले आहे. हा झाला गणिताच्या इतिहासाचा भाग !

(a, b, c) हे पायथॉगोरीय त्रिकूट आहे याचा अर्थ $a^2 + b^2 = c^2$ हे सूत्र सत्य आहे. येथे काटकोनासमोरील बाजू c आहे. कर्ण अशा त्रिकूटात तिसऱ्या जागेवर असतो. या त्रिकोणातील c ही सर्वात लांब बाजू असते. (5, 12, 13) हे पायथॉगोरीय त्रिकूट आहे याचा अर्थ $5^2 + 12^2 = 13^2$ होय. या प्रमेयाचा व्यत्यास : जर (a, b, c) या त्रिकूटात $a^2 + b^2 = c^2$ असेल तर हा काटकोन त्रिकोण असतो. हा व्यत्यास सिद्ध आहे.

आपण आता

$a^2 + b^2 = c^2$ (3)

हे एक समीकरण आहे असे गृहीत धरु. याचा अर्थ a, b, आणि c या चलसंख्या आहेत. या समीकरणाची सर्व उत्तरे मिळाली तर आपल्याला काटकोन त्रिकोणांचे त्रिकोणनगरीतील एक कुटुंबच मिळेल. अर्थात या समीकरणाची सर्वच उत्तरे मिळवणे तसे अवघड आहे. निदान यापैकी काही उत्तरे कशी मिळतील याचा आपण आता शोध घेऊ. समजा m आणि n या नैसर्गिक संख्या आहेत. व $m > n$ आहे. आता असेही समजू की

(i) $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ व $c = m^2 + n^2$ आहे.

या (a, b, c) च्या किंमती आहेत तर

$a^2 + b^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2 mn)^2$

$= (m^2 + n^2)^2$

$= c^2$ होय.

याचा अर्थ (a, b, c) = $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ हे त्रिकूट (3) या समीकरणाचे उत्तर आहे. खरे तर, (3) मध्ये अनंत नैसर्गिक संख्या समाविष्ट आहेत. येथे आपल्याला m आणि n या m > n या नैसर्गिक संख्या घेता येतात. अशी निवड अनंत पद्धतीने करता येते. खाली काही उदाहरणे दिली आहेत.

जर

m = 3 व n = 2 असेल तर (a, b, c) = (5, 12, 13),

m = 4 व n = 3 असेल तर (a, b, c) = (7, 24, 25),

m = 100 व n = 1 असेल तर (a, b, c) = (9999, 200, 10001).

अशी अगणित त्रिकूटे मिळवता येतील. वर काढलेली सर्व त्रिकूटे काटकोन त्रिकोण आहेत. खाली काही भव्य काटकोन त्रिकोण दिले आहेत.

आता संगणकाच्या सहाय्याने भव्य काटकोन त्रिकोण मिळवता येतात. खालील कोष्टकात असे 4 काटकोन त्रिकोण दिले आहेत. (i) मध्ये दिलेल्या सूत्रातून खालील कोष्टक येते.

			उंची	पाया	कर्ण	क्षेत्रफळ
	m	n	a	b	c	K
(1)	149	58	18837	17284	25565	162789354
(2)	224	153	26767	68544	73585	617358624
(3)	666	5	443531	6660	443581	1476958230
(4)	406	289	86995	226518	262677	9854271630

कोष्टक - 2 **काटकोन त्रिकोण**

(ii) आता (x - d, x, x + d) या त्रिकूटाचा विचार करु. हे त्रिकूट काटकोन त्रिकोण होण्यासाठी x आणि d वर कोणती बंधने घालावीत हे शेवटी ठरवू. आता

$(x - d)^2 + x^2 = (x + d)^2$ म्हणजेच

x (x - 4d) = 0 म्हणजेच x = 0 व x = 4d

जर x = 0 असेल तर दिलेले त्रिकूट (-d, o, d) होईल पण हा क्षुल्लक त्रिकोण आहे. म्हणून x = o ही निवड वगळू. पण जर x = 4d असेल तर दिलेले त्रिकूट (3d, 4d, 5d) असेल येथे d ही संख्या धन असणे गरजेचे आहे. या प्रत्येक किंमतीला आता काटकोन त्रिकोण मिळतो.

(iii) n ही कोठलीही नैसर्गिक संख्या आहे. खुद्द पायथॉगोरसने त्याच्या ग्रंथात काटकोन त्रिकोण मिळवण्यासाठी

$(2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n^2 + 2n + 1)$

या त्रिकूटाचा उपयोग केला होता. येथे n = 3 असेल तर (7, 24, 25) हे पायथॉगोरीय त्रिकूट मिळते.

(iv) डायोफंटस (Diophantus) या गणितज्ञाने

$\left(\frac{2mz,}{m^2+1,} \quad \frac{(m^2-1)z,}{m^2+1}, \ z\right)$

हे पायथॉगोरीय त्रिकूट काटकोन त्रिकोण मिळवण्यासाठी वापरले होते. येथे m आणि z या नैसर्गिक संख्या आहेत.

(v) (24, 45, 51), (20, 48, 52), (30, 40, 50) या तीन पायथॉगोरीय त्रिकोणांची परिमिती सारखी (2S = 120) आहे पण त्यांची क्षेत्रफळे अनुक्रमे 540, 480, 600 आहेत. ती असमान आहेत. हे तीनही हेरॉन त्रिकोण आहेत. याचा अर्थ परिमिती सारखी असली तरी क्षेत्रफळ समान असतेच असे नाही.

(vi) एल् क्रोनेकर या गणितज्ञाने

$(2pqt), \ t(p^2 - q^2), \ t(p^2 + q^2)$ हे पायथॉगोरीय त्रिकूट योजून काटकोन त्रिकोण मिळवले. यथे p आणि q या संख्या एकाच वेळी विषम नसाव्यात. व या संख्या सापेक्ष मूळसंख्या (relatively prime) असाव्यात. p, q, t या नैसर्गिक संख्या आहेत.

या विभागात काटकोन त्रिकोण मिळवण्यासाठी एकूण 6 सूत्रे नमूद केली आहेत. या प्रकारच्या शोधातून काही नवीन प्रश्न निर्माण झाले. येथे आपण $a^2 + b^2 = c^2$ या पायथॉगोरीय सिद्धांताची चर्चा केली आहे. याची पुढील पायरी म्हणून $a^n + b^n = c^n, \ n > 2,$ (n : नैसर्गिक संख्या) या समीकरणांचा व्यापक अभ्यास झाला आहे. याचा येथे फक्त उल्लेख केला आहे.

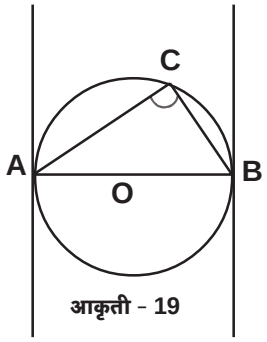
❑ ❑ ❑

5. एक भूमितीय प्रश्न : अंदाज बांधणी

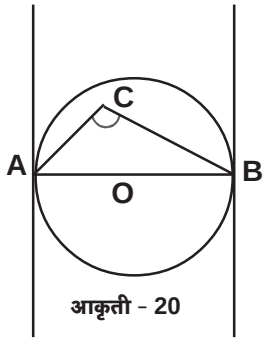
त्रिकोणांची कोनांच्या आधारणीवर विभागणी केली तर आपल्याला लघुकोन त्रिकोण, काटकोन त्रिकोण व विशालकोन त्रिकोण मिळतात. कोणताही त्रिकोण यापैकी स्पष्टपणे एकाच विभागात पडतो. प्रत्येक विभागात अनंत त्रिकोण असतात. मोजता येणाऱ्या पण अपरिमित संख्येला गणनीय संख्या म्हणतात. (उदाहरणार्थ : सर्व नैसर्गिक संख्या). अपरिमित पण मोजता न येणाऱ्या संख्यांना अगणनीय संख्या म्हणतात. (उदाहरणार्थ : सर्व सत् संख्या)

आपण एका प्रतलावर जर त्रिकोण काढत राहिलो तर त्रिकोणांची संख्या अगणनीय आहे असे लक्षात येते. वर नोंदलेल्या त्रिकोणांच्या प्रत्येक विभागात असे अगणनीय त्रिकोण असतात.आता प्रत्येक त्रिकोण प्रकाराचा संच लक्षात घेऊ. हे तीनही संच अगणनीय आहेत. पण यापैकी कोणता संच मोठा आहे असे विचारले तर मात्र नेमके उत्तर देणे शक्य होत नाही. एकाच प्रतलावर काढलेल्या त्रिकोणात लघुकोन त्रिकोण जास्त आहेत का विशालकोन त्रिकोण जास्त आहेत याचे उत्तर देणे तसे अवघडच आहे. तरीपण गणितज्ञ या प्रश्नाशी झगडत राहिले. नेमके उत्तर देता येत नाही हे खरे ! निदान काही अंदाज घेता येईल का ? असा दुसरा प्रस्ताव पुढे आला. व पटतील अशा भूमितीच्या काही रचना सुचविल्या गेल्या. खाली काढलेल्या तीन रचनावर आपण लक्ष केंद्रित करु.

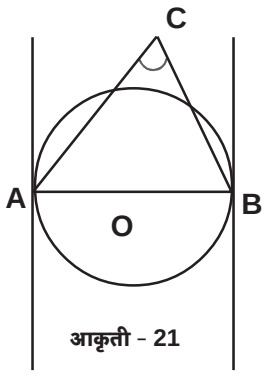
(1) एका मोठ्या प्रतलावर आपण खाली वर्णिलेल्या चार आकृत्या शक्यतो प्रतलाच्या मधील भागावर काढा.



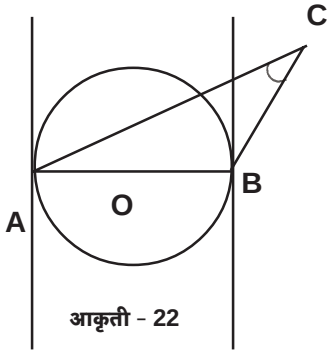
आकृती - 19



आकृती - 20



आकृती - 21



आकृती - 22

आकृत्या 19 ते 22 मध्ये 0 मध्यबिंदू असलेली सारख्याच त्रिज्येची चार वर्तुळे काढली आहेत. प्रत्येक वर्तुळात A व B बिंदूतून चारही वर्तुळांना स्पर्शरेषा काढल्या आहेत. यामुळे वर्तुळांना सामावणाऱ्या ४ पट्ट्या दिसतात त्या कितीही वाढवता येतात. ABC त्रिकोणाचा C हा शिरोबिंदू वेगवेगळ्या ठिकाणी घेतला आहे तो असा :

(अ) आकृती -19 मध्ये C बिंदू वर्तुळाच्या परिघावर घेतला आहे. त्यामुळे $\angle$ ACB हा 90^0 आहे. येथे C बिंदू परिघावरील कोठलाही बिंदू आहे. Δ ACB हा काटकोन त्रिकोण आहे. अशा त्रिकोणांची संख्या अगणनीय असते.

(आ) आकृती - 20 मध्ये C बिंदू वर्तुळाच्या आत कोठेही घेतला आहे. येथे $\angle$ ACB हा विशालकोन आहे हे सहज लक्षात येते. ΔACB विशालकोन त्रिकोण आहे. असे अगणित विशालकोन Δ काढता येतील हे सहज समजते.

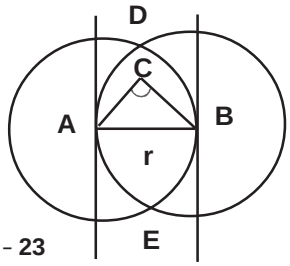
(इ) आकृती - 21 मध्ये C शिरोबिंदू वर्तुळाच्या बाहेर पण तेथे काढलेल्या पट्टीत आहे. C ची निवड कोठलीही आहे. आता $\angle$ACB कडे पाहिले तर लक्षात येते की Δ ACB हा लघुकोन त्रिकोण आहे. परिणामी आपल्याला असे अगणित लघुकोन त्रिकोण मिळतील.

(ई) आकृती - 22 मध्ये C हा शिरोबिंदू वर्तुळाच्या बाहेर आहेच पण तो आता तेथे काढलेल्या पट्टीच्याही बाहेर आहे. $\angle$ ABC आता विशालकोन आहे. त्यामुळे Δ ABC हा विशालकोन त्रिकोण आहे. असे अगणित विशालकोन त्रिकोण काढता येतील हे सहज लक्षात येते. आपण घेतलेले प्रतल सर्व बाजूंनी वाढवता येईल.

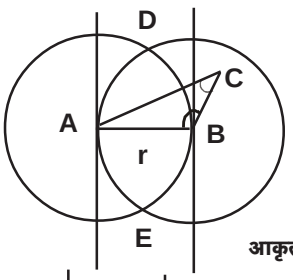
आता अशाप्रकारे मिळवलेल्या तीन विभागीय संचांचा विचार करू. काटकोन त्रिकोण मिळवण्यासाठी प्रतलावर काढलेल्या वर्तुळाच्या फक्त परिघावरील बिंदू आपल्याला पुरेसे आहेत. लघुकोन त्रिकोण संच मिळवण्यासाठी वर्तुळाबाहेरील पण फक्त काढलेल्या पट्टीच्या आत येणारे बिंदू लक्षात घ्यावे लागतात तर विशालकोन त्रिकोणांचा संच वर्तुळाच्या आतील व वर्तुळाच्या आणि पट्टीच्या बाहेरील (डाव्या आणि उजव्या बाजूसहित) सर्व बिंदू घेता येतात.

येथे तयार केलेल्या प्रत्येक संचात अगणित त्रिकोण आहेत हे नमूद केले आहेच. पण काहीशा अंदाजाने आपण असे म्हणू शकतो की विशालकोन त्रिकोणांचा संच अन्य दोन संचापेक्षा मोठा असावा. वर केलेले संचाचे वर्णन असे विधान करण्यास मात्र पुरेसे नाही. या वर्णनातून काहीसा अंदाज मात्र व्यक्त करता येतो. एका गणिततज्ञाने तर असे म्हटले की त्रिकोण नगरीत सर्व विशालकोन त्रिकोणच असतात. पण एकाच भूमितीच्या रचनेतून असे विधान करणेही युक्त ठरणार नाही. आपण आणखी एका रचनेचा विचार करू.

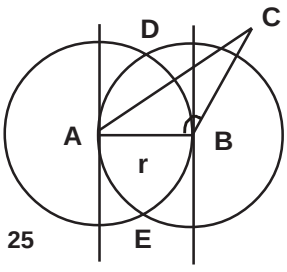
2) आणखी एक भूमितीय रचना :



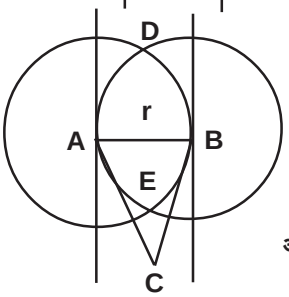
आकृती - 23



आकृती - 24



आकृती - 25



आकृती - 26

वर काढलेल्या आकृत्यात A आणि B बिंदू दोन समान वर्तुळांचे मध्यबिंदू असून AB अंतर वर्तुळाच्या त्रिज्या r एवढे आहे. A आणि B बिंदूमधून दोन समांतर रेषा काढून पट्टीस्वरूप आकृती तयार केली आहे. त्रिकोण तयार करण्यासाठी शिरोबिंदू C वेगवेगळ्या ठिकाणी निवडला आहे. आता प्रत्येक आकृतीतील त्रिकोणाकडे लक्ष देऊ.

(अ) आकृती - 23 मध्ये C बिंदू दोन्हीही वर्तुळांच्या आत निवडला आहे. त्यामुळे $r > AC$ व $r > BC$ आहे याचा अर्थ Δ ABC मध्ये $r = AB$ ही सर्वात मोठी भुजा आहे. C बिंदूची निवड जशी केली आहे त्यावरून Δ ACB हा लघुकोन त्रिकोण आहे का विशालकोन त्रिकोण आहे हे निश्चित करणे अवघड आहे. तो त्रिकोण दोन्हीही विभागात असू शकतो एवढे निश्चित करता येते. एकूण प्रतलाच्या क्षेत्रफळातून ADBE हे क्षेत्रफळ आपण 'अनिश्चित' स्वरूपाचे मानू.

(आ) आकृती - 24 मध्ये शिरोबिंदू C हा कोठलाही बिंदू एका वर्तुळाच्या बाहेर तर दुसऱ्या वर्तुळाच्या आत आहे. त्यामुळे $AC > r > BC$ आहे. याचा अर्थ Δ ABC मध्ये AB भुजा मध्यम आकाराची आहे. हा विशालकोन त्रिकोण आहे. असे अगणित विशालकोन त्रिकोण आहेत.

(ई) आकृती - 25 मध्ये C हा बिंदू दोन्ही वर्तुळांच्या व दिलेल्या पट्टीच्या बाहेर आहे. त्यामुळे $AB = r$ ही बाजू त्रिकोण ACB ची सर्वात लहान बाजू आहे. तसेच $\angle$ ABC हा विशालकोन आहे व Δ ABC हा विशालकोन त्रिकोण आहे.

(इ) आकृती - 26 मध्ये C हा कोठलाही बिंदू दोन्ही वर्तुळांच्या बाहेर पण दिलेल्या पट्टीच्या आत आहे. जर C बिंदू D व E या ठिकाणी असता तर Δ ABC हा समभुज त्रिकोण झाला असता. व या त्रिकोणाचा प्रत्येक कोन 60^0 असता. दिलेल्या चित्रात C पट्टीच्या आत पण दोन्ही वर्तुळांच्या बाहेर असल्याने Δ ACB हा लघुकोन त्रिकोण होतो. या प्रकारे पुन्हा आपल्याला अगणित त्रिकोण मिळतील.

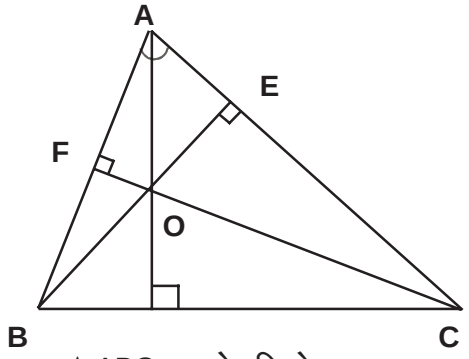
आता या सर्व आकृतीसाठी घेतलेल्या प्रतलाचे क्षेत्रफळ लक्षात घेऊ व या क्षेत्रफळाची विभागणी त्रिकोणांच्या प्रकारानुसार करू. या विभागणीत विशालकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ खूपच मोठे आहे. अंदाजाने असे म्हणता येईल की विशालकोन त्रिकोण निर्मितीचे प्रमाण मोठे असावे. एक लक्षात घेतले पाहिजे की अगणनीय संख्यांची अशी तुलना करणे शक्य नाही. ही भूमितीय रचना बोधप्रद आहे म्हणून ती दिली आहे, एवढेच !

19 व्या शतकात जर्मन गणितज्ञ कॅन्टर याने 'अनंत' या संज्ञेला नेमका अर्थ प्राप्त करून दिला. गणनीय व अगणनीय अनंत संख्यांचा अभ्यास नंतर वाढला. वर नोंदलेले त्रिकोणांचे तीनही संच अगणनीय आहेत व ते समान (Equivalent) आहेत हे सत्य गणितात सिद्ध आहे. येथे फक्त तुलनात्मक क्षेत्रफळातून अंदाज बांधला आहे.

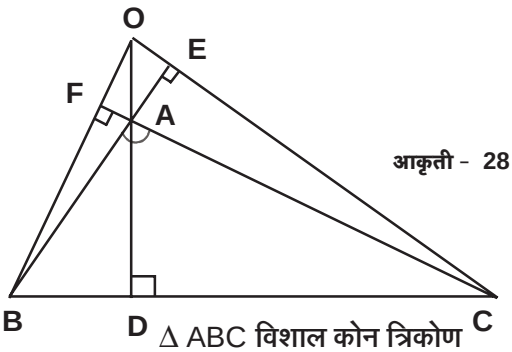
(3) आणखी एक भूमितीय रचना :-

खाली दोन त्रिकोण आकृती काढल्या आहेत. यात Δ ABC आहे लघुकोन त्रिकोण आणि दुसरा आहे विशालकोन त्रिकोण.

आकृती - 27



Δ ABC लघुकोन त्रिकोण



आकृती - 28

Δ ABC विशाल कोन त्रिकोण

$\angle$A : विशाल कोन

वरील त्रिकोणात AD, BE आणि CF हे शिरोलंब आहेत. ते लंबसंपात बिंदू O मध्ये मिळतात. लघुकोन त्रिकोणात O बिंदू त्रिकोणाच्या आतील क्षेत्रफळात असतो तर विशालकोन त्रिकोणात तो त्रिकोणाच्या बाहेरील क्षेत्रात असतो. हे विधान सिद्ध करता येते. आता या दोन्ही आकृतीतील खाली दिलेल्या 4 त्रिकोणांचा विचार करू. Δ AOB, Δ BOC, Δ COA व Δ ABC

आता

Δ AOB चा लंबसंपात बिंदू C आहे,
Δ BOC चा लंबसंपात बिंदू A आहे.
Δ COA चा लंबसंपात बिंदू B आहे.
Δ ABC चा लंबसंपात बिंदू O आहे.

हे सहज लक्षात येते. आकृती - 27 व 28 मध्ये हे विधान तपासून पहा. थोडक्यात A, B, C आणि O या चार बिंदूपैकी कोणतेही 3 बिंदू निवडा व त्यांचा त्रिकोण काढा तर राहिलेला बिंदू त्या त्रिकोणाचा लंबसंपात बिंदू असतो.

आकृती - 27 मध्ये Δ ABC हा लघुकोन त्रिकोण आहे तर बाकीचे तीन विशालकोन त्रिकोण आहेत.

आकृती - 28 मध्ये Δ BOC हा लघुकोन त्रिकोण आहे तर बाकीचे तीन विशालकोन त्रिकोण आहेत. अन्य लंबसंपात बिंदूंच्या संदर्भात असेच विधान दोन्ही आकृतीतून निदर्शनास येईल. याचा अर्थ प्रत्येक ठिकाणी 3 विशालकोन त्रिकोण व एकच लघुकोन त्रिकोण तयार होतात. पहिल्या दोन भूमितीय रचनेत विशालकोन त्रिकोणांची संख्या लघुकोन त्रिकोणांपेक्षा जास्त आहे असा जो अंदाज व्यक्त केला होता. या तिसऱ्या भूमितीय रचनेत हा अंदाज आता बळकट झाला आहे.

अशाच अन्य भूमितीय रचना करून त्रिकोण नगरीत 75% विशालकोन त्रिकोण असावेत असा अंदाज गणिततज्ञांनी व्यक्त केला आहे.

वर दिलेली माहिती ही या विधानाची गणितीय सिद्धता नाही हे मात्र लक्षात ठेवले पाहिजे. कोणी सांगावे नवीन पिढीतील एखादा गणितज्ञ वरील विधान खरे किंवा खोटे आहे ते भविष्यकाळात नेमके ठरवील. म्हणूनच हा प्रश्न येथे फक्त उपस्थित केला आहे.

वरील चर्चा तशी निष्फळ आहे असे समजू नये. भूमितीच्या नवीन नवीन रचनामधून अनेक प्रकारची दडलेली माहिती कशी उलगडत जाते ते येथे समजले. हे ही नसे थोडके !

वर दिलेल्या विवेचनासाठी खाली नोंदलेला संदर्भ शोधनिबंध उपयोजित केला आहे. त्यात आणखी काही भूमितीय रचना दिल्या आहेत.

Guy Richard K. There are three times obtuse angled triangles as there are acute angled tranigles, Mathametics Magazine, Volume 66, No.3, June 1993 (USA)

❑ ❑ ❑

6. त्रिकोण नगरीतील एक कुटुंब

मी शाळेत इयत्ता 7 वीत असताना भूमितीत त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढण्यास शिकलो. त्यावेळी शिक्षकांनी Δ ABC फळ्यावर काढला. त्याच्या भुजा 3, 4, 5 अशा होत्या. सूत्राप्रमाणे या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ 6 हे उत्तर काढले. त्रिकोणाची परिमिती शिकवली होतीच. ती 12 आहे हे पण लक्षात आले. या त्रिकोणाची परिमिती क्षेत्रफळाच्या दुप्पट आहे असेही ते म्हणाले. या गुणवत्तेमुळे हा सोपा त्रिकोण माझ्या लक्षात राहिला होता. या त्रिकोणाचे गुणधर्म असे.

(1) या त्रिकोणाच्या भुजा 3, 4 व 5 लांबीच्या आहेत व या सर्व नैसर्गिक सलग संख्या आहेत;

(2) हा काटकोन त्रिकोण आहे.

(3) या त्रिकोणात $\mu = 2$ आहे; μ म्हणजे परिमिती आणि क्षेत्रफळ यांचे गुणोत्तर.

(4) या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ 6 आहे व ही संख्या 3, 4, 5 या संख्यांना सलग आहे.

महाविद्यालयात पहिल्या वर्षी आम्हाला 'त्रिकोणमिती' प्रकरणात क्षेत्रफळ काढण्यासाठी हेरॉनचे सूत्र उपयुक्त असल्याचे लक्षात आणून दिले. (3, 4, 5) या त्रिकूटाला लाभलेली गुणवत्ता असणारा असाच दुसरा त्रिकोण आहे का याचा शोध घेण्याचा मी काही काळ प्रयत्न केल्याचे आठवते. यासाठी चाचणी पद्धत वापरत होतो. पण असा त्रिकोण मला मिळाला नाही.

1955 साली आर.पी.पेल्प याने परिपूर्ण त्रिकोणाची व्याख्या केली ती विभाग-2 मध्ये दिली आहे. त्याने असा दुसरा परिपूर्ण त्रिकोण शोधून काढण्याचे गणितज्ञांना आवाहन केले. 1956 साली एन्.जे.फाइन या गणितज्ञाने (3, 4, 5) हा त्रिकोण नगरीत एकमेव परिपूर्ण त्रिकोण असल्याचे सिद्ध केले. चाचणी पद्धतीची मर्यादा, त्यांचा शोध निबंध वाचल्यावर माझ्या लक्षात आली.

एन्. जे. फाइन यांच्या सिद्धतेमुळे आता या दिशेने शोध घेणे थांबेल असे वाटले होते. पण 1973 साली एच्.डब्लू गौल्ड याने या शोधमोहिमेला कलाटणी दिली व त्रिकोणाच्या अभ्यासाला वेगळीच गती मिळाली. त्यांनी वर नोंदलेल्या गुणधर्म यादीतील 'तो त्रिकोण काटकोन त्रिकोण असला पाहिजे' हे बंधन काढून टाकण्याचे सुचवले. आता फक्त खालील दोनच गुणधर्म असलेले त्रिकोण शोधण्याचे काम सुरू झाले. ते असे :

(1) त्रिकोणाच्या तीन भुजा सलग नैसर्गिक संख्या असाव्यात;

(2) त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ K ही नैसर्गिक संख्या असावी.

(1, 2, 3) हा त्रिकोण लक्षात घेता येईल पण तो क्षुल्लक त्रिकोण आहे. म्हणून वर नोंदलेल्या दोन्ही अपेक्षा पूर्ण करणारा (3, 4, 5) हा पहिला त्रिकोण आहे. त्याचे क्षेत्रफळ ६ आहे. चाचणी पद्धतीने (13, 14, 15) व (51, 52, 53) हे दोन त्रिकोण व अनुक्रमे त्यांची क्षेत्रफळे 84 व 1170 मिळाले. या प्रयत्नातून लक्षात आले की असे आणखीही त्रिकोण असावेत. पण चाचणी पद्धतीने असे त्रिकोण मिळणे अवघड झाले. नेमके गणितीय सूत्र हाताशी आले तरच आणखी त्रिकोण मिळतील असे लक्षात आले. पण अखेरीला ते सूत्र गोल्ड यांना मिळाले. ते लक्षात येण्यासाठी मिळालेल्या माहितीचे कोष्टक लिहू. तसेच सोयीसाठी नवी चिन्हव्यवस्था घेऊ. आपल्याला तीन सलग नैसर्गिक संख्या हव्यात यासाठी

(a, b, c) = (u_n- 1, u_n, u_n + 1) असे समजू. तसेच आपल्याला अगोदरच (1, 2, 3), (3, 4, 5), (13, 14, 15), (51, 52, 53) ही त्रिकूटे माहीत आहेत. त्याची क्षेत्रफळे 0, 6, 84, 1170 माहीत आहेत. ही माहिती खालील कोष्टक - 3 मध्ये दिली आहे. K_n हे चिन्ह n या जागेवर असणाऱ्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ आहे असे समजू.

n	$a = u_n - 1$	$b = u_n$	$C = u_n + 1$	K_n	शेरा
0	1	2	3	0	क्षुल्लक त्रिकोण
1	3	4	5	6	
2	13	14	15	84	
3	51	52	53	1170	
4	?	?	?	?	
5	:	:	:	:	

कोष्टक (3)

हे कोष्टक (3) आता आपल्याला वाढवत न्यायचे आहे. एका गणितज्ञाने कोष्टक (3) चा सातत्याने पाठपुरावा केला व कोष्टकातील संख्यांचा नातेसंबध शोधून काढला. त्याच्या लक्षात आले की u_n या रकान्यातील संख्या

$u_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$, n = o, 1, 2, 3,.... **(4)**

(4) या सूत्राने मिळतात त्या अशा :

n = 0 $u_0 = (2 + \sqrt{3})^0 + (2 - \sqrt{3})^0 = 1 + 1 = 2$

n = 1 $u_1 = (2 + \sqrt{3})^1 + (2 - \sqrt{3})^1 = 2 + 2 = 4$

n = 2 $u_2 = (2 + \sqrt{3})^2 + (2 - \sqrt{3})^2 = 14$

n = 3 $u_3 = (2 + \sqrt{3})^3 + (2 - \sqrt{3})^4 = 52$

u_n या संख्यातून 1 ही संख्या वजा केली आणि 1 संख्येने वाढवली की u_n - 1 व u_n + 1 मिळतात. आता त्रिकोणाच्या तीन सलग भुजा मिळाल्या की हेरॉन सूत्र वापरून आपल्याला क्षेत्रफळे K_o, K_1, K_2, K_3 मिळतात. आता कोष्टक - 3 वाढवता येते हे लक्षात आले. उदाहरणार्थ :

n = 4, $u_4 = (2 + \sqrt{3})^4 + (2 - \sqrt{3})^4 = 194$, म्हणून u_4 - 1=193 आणि u_4 + 1 = 195 होय. तसेच हेरॉन सूत्राने (193, 194, 195) या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ 16296 आहे. या रीतीने u_5, u_6, u_7.... या संख्या काढता येतात व कोष्टक (3) वाढवण्याची, न संपणारी वाट मोकळी होते. अशा रीतीने विस्तारित कोष्टक - 3 हे त्रिकोणनगरीतील एक कुटुंब आपल्या ओळखीचे झाले आहे.

कोष्टक - (3) मध्ये K_n ही संख्या वेगाने वाढत जाते असे सहज लक्षात येते. उदाहरणार्थ,

n = 20 साठी $u_{20} = (2 + \sqrt{3})^{20} + (2 - \sqrt{3})^{20} = 275758382274$ ही 12 अंकी संख्या मिळते. आता $u_{20} - 1$ व $u_{20} + 1$ लिहिता येईल. पण K_{20} ही संख्या किती मोठी असेल ते सहज लक्षात येईल. n जर लाखाच्यापेक्षा मोठी असेल तर K_n ची संख्या मोठा संगणक वापरून काढावी लागेल. गणितज्ञांनी अशी आणखी काही कुटुंबे अशीच शोधून काढली आहेत. उदाहरणार्थ $u_n - 2$, u_n, $u_n + 2$ हा त्रिकोण असाच अभ्यास करून समजून घेता येईल व अगणित त्रिकोण लिहिता येतील.

वर दिलेले सूत्र (4) तसे समजण्यास सोपे आहे पण n ही संख्या मोठी होत गेली की $(2 \pm \sqrt{3})^n$ ही संख्या प्रत्यक्ष काढणे मात्र अवघड होत जाते. गौल्ड या गणितज्ञाने कोष्टक - 3 मधील u_n रकान्यात येणाऱ्या संख्यांचा अभ्यास केला. त्याच्या लक्षात आले की या संख्या खालील सूत्राच्या आधारे लिहिता येतात. ते असे :

$$u_{n+2} = 4\,u_{n+1} - u_n, \qquad u_o = 2, \qquad u_1 = 4 \qquad n = 2, 3, 4, 5,... \qquad (5)$$

आपण काही u_n संख्या काढल्या आहेत त्या आता (5) चा उपयोग करून तपासून घेता येतील. उदाहरणार्थ

n = 1, $u_3 = 4u_2 - u_1 = 4\,(4) - 2 = 14$,

n = 2 $u_4 = 4u_3 - u_2 = 4\,(14) - 4 = 52$.

(5) या सूत्रात u_{n+2} ही संख्या त्यापूर्वी आलेल्या u_{n+1} आणि u_n वर अवलंबून आहे. व ही योजना अव्याहत चालणार आहे. गणिताच्या अभ्यासात अशा स्वरूपाची सूत्रे अनेक ठिकाणी येतात. या प्रकारच्या सूत्रांना 'पुनरावर्तित सूत्रे' (Recurrence Relations) असे म्हणतात. (5) हे अशा प्रकारचे सूत्र आहे.

क्षेत्रफळाच्या रकान्यात k_n या संख्येचे पुनरावर्तित सूत्र

(6) $K_{n+2} = 4\ K_{n+1} - K_n$, $K_0 = 0$, $K_1 = 6$; n = 2, 3, 4, 5,... आहे. उदाहरणार्थ, आपल्याला K_o व K_1 माहीत आहे. आता सूत्र (6) चा उपयोग करून K_2 काढू. येथे n = o घेऊन

$K_2 = 14\ K_1 - K_0 = 14\,(6) - 0 = 84$ येईल. कोष्टकात $K_2 = 84$ ही संख्या दिलेली आहे. K_2 व K_1 माहीत झाले की K_3 काढता येईल. ही साखळी अखंडित आहेच.

आतापर्यंत त्रिकोण नगरीतील या कुटुंबाच्या भुजा आणि क्षेत्रफळ यांचा विचार झाला. त्रिकोणाची आणखी ओळख होण्यासाठी r, r_a, r_b, r_c, R या संख्याही माहीत करून घ्याव्या लागतात. त्या मिळवण्यासाठी लागणारी सूत्रे विभाग - 2 मध्ये दिली आहेत. ती योजून या कुटुंबातील अशी वाढीव संख्यात्मक माहिती काढता येईल. त्यासाठी जर r, r_a, r_b, r_c, R यासाठी पुनरावर्तित सूत्रे मिळाली तर सर्व त्रिकोणांची अशी वाढती ओळख सुलभपणे होत जाईल. ही सर्व सूत्रे येथे दिलेली नाहीत पण या संख्यांचे एक कोष्टक (4) मात्र खाली दिले आहे. खरे तर, कोष्टक - (3) च्या उजव्या बाजूला कोष्टक - (4) जोडले तर या कुटुंबातील सर्व त्रिकोणांची माहिती n, $u_n - 1$, u_n, u_{n+1}, k_n, r, r_a, r_b, r_c, R या स्वरूपात एकत्रित येईल.

n	r_n	$\{r_n\}_a$	$\{r_n\}_b$	$\{r_n\}_c$	R
0	0	0	0	0	0
1	1	œ	3	2	$\frac{5}{2}$
2	4	6	12	$\frac{21}{2}$	$\frac{65}{8}$
3	15	14	45	$\frac{130}{3}$	$\frac{901}{30}$
4	56	$\frac{234}{5}$	168	$\frac{1164}{7}$	$\frac{12545}{12}$
5	209	$\frac{679}{4}$	627	$\frac{6878}{11}$	$\frac{17425}{418}$
	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.

कोष्टक - (4)

कोष्टक - 4 अखंडपणे वाढवता येईल. कोष्टक - 4 मध्ये r_n आणि $\{r_n\}_b$ या सर्व नैसर्गिक संख्या आहे. निदान या रकान्यातील संख्याचे पुनरावर्तित सूत्र काढता येते का ? प्रयत्न करा.

त्रिकोणनगरीतील एकाच कुटुंबाची आपण माहिती कोष्टक - 4 स्वरूपात सादर केली आहे. यासंबंधी एक महत्वाची माहिती येथे नमूद करावी लागेल. या सर्व परिमेय संख्या आहेत. असे क्वचितच घडते.

या त्रिकोणांची आणखी माहिती मिळवता येईल. त्रिकोणात मध्यगा, शिरोलंब व कोनद्विभाजक असतात. या सर्व रेषांच्या लांब्या काढता येणे शक्य आहे. ही माहिती येथे दिलेली नाही.

$a + b + c = 2K$

या समीकरणाचे उत्तर (3, 4, 5) हा त्रिकोण आहे याचा उल्लेख पूर्वी केला आहे. आता

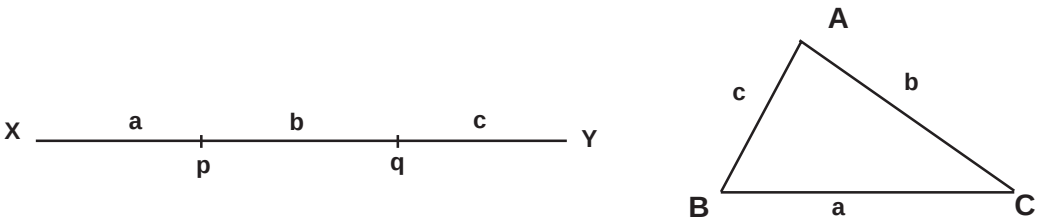
$a + b + c = 3K$

असे समीकरण दिले तर त्याचे उत्तर काढता येईल का ? याचा अर्थ परिमिती क्षेत्रफळाच्या 3 पट असणारा त्रिकोण आहे का ? या प्रश्नाचे उत्तर आहे : असा कोणताही त्रिकोण अस्तित्वात नाही.

❑ ❑ ❑

7. काठीचे तुकडे आणि त्रिकोण निर्मिती

एक लांब काठी अगर पट्टी घ्या. या काठीची लांबी नैसर्गिक संख्या n असावी. तिचे 3 भाग करू. यासाठी काठी दोन ठिकाणी कापावी लागेल. काठीचे तुकडेही नैसर्गिक संख्या a, b, c लांबीचे आहेत. यामुळे
a + b + c = n.....(7) आहे. येथे a, b, c या चल संख्या आहेत. व n ही दिलेली संख्या आहे.
यामुळे (7) हे एक समीकरण आहे. हे तीन तुकडे जोडून तयार झालेला त्रिकोण आकृती-29 मध्ये दाखवला आहे :



आकृती - 29

येथे XP + PQ + QY = a + b + c = n.

त्रिकोण तयार होण्यासाठी XY ही काठी योग्य जागेवरच तोडावी लागेल. कारण (a, b, c) त्रिकोणात a + b > c किंवा b + c > a आणि c + a > b हे बंधन अपरिहार्य आहे. जर a + b = c, किंवा b + c = a अगर c + a = b असेल तर Δ ABC क्षुल्लक त्रिकोण होईल. अशा त्रिकोणाचा अभ्यासासाठी काहीच उपयोग नाही.

समजा XY = n = 7 आहे व या काठीचे तुकडे 5, 1, 1 अशा लांबीचे केले तर त्रिकोण (a, b, c) = (5, 1, 1) होईल. हा त्रिकोण क्षुल्लक स्वरूपाचा आहे. n = 7 साठी समीकरण (7) चे (5, 1, 1) हे उत्तर होणार नाही. कारण येथे a + b = 5 + 1 < 1 = c आहे. पण a = 2, b = 2, c = 3 असे तुकडे मिळवले तर त्रिकोण तयार होतो. कारण स्पष्ट आहे. याचा अर्थ काही वेळा त्रिकोण होतो तर काही वेळा तो होत नाही. आता n = 7 या काठीचे किती तुकडे तयार होतात ती सर्व त्रिकूटे आपण मांडू. ही मांडणी करताना (a, b, c) = (b, c, a) = (c, a, b) हे लक्षात ठेवले पाहिजे.

n = 7 साठी (7, 0, 0), (6, 1, 0), (5, 2, 0), (5, 1, 1), (4, 3, 0), (4, 2, 1), (3, 2, 2), (3, 3, 1) अशी तीन त्रिकूटे तयार होतात. येथे एकूण 8 त्रिकूटे लिहिली आहेत. त्यापैकी फक्त (3, 2, 2) व (3, 3, 1) या त्रिकूटांचे त्रिकोण तयार होतात. तर बाकीच्या सहा त्रिकूटांचे क्षुल्लक त्रिकोण होतात. वर दिलेल्या एकूण त्रिकूटांची मांडणी लक्षात घेतली तर n = 8, n = 9, ... यासाठी त्रिकूटे मांडता येतील. प्रत्येक मांडणीत दोन प्रकारचे त्रिकोण तयार होतात.

(1) जे निश्चित त्रिकोण होतात त्यांची संख्या T (n) या संज्ञेने लिहू. n = 7 साठी T (7) = 2 हे लक्षात येते.

(2) बाकीचे सर्व त्रिकोण क्षुल्लक आहेत त्यामुळे त्यांचा विचार करण्याची गरज नाही.

येथे T (n) ही संख्या मिळवण्यासाठी आपण चाचणी पद्धत वापरली आहे. ही पद्धत वापरून T (o), T (1), ..., T (14)

संख्यांचे कोष्टक-5 तयार केले आहे. आणखी काही संख्या n = 15, n = 16, n = 17 ... चाचणी पद्धतीने तपासता येतील पण नंतर ही पद्धत कंटाळवाणी होत जाईल. खाली दिलेले कोष्टक-5 तपासून घ्यावे लागेल कारण अशा सूक्ष्म पहाणीतून T (n) साठी काही सूत्र मिळते का ? ते पहावे लागेल.

खाली दिलेल्या कोष्टक-5 मध्ये पहिल्या रकान्यात काठीची लांबी n (n = 1, 2, ...) ही नैसर्गिक संख्या दिली आहे. दुसऱ्या रकान्यात n ची विभागणी a, b, c मध्ये करून निर्णयी त्रिकोण (a, b, c) दिले आहेत. पुढील रकान्यात त्रिकोणांची संख्या T (n) दिली आहे. T (n) संख्येच्या मिळणाऱ्या श्रेणीतून काही गणिती सूत्रे मिळतात का ? हे गणितज्ञानी शोधले व त्यात त्यांना यश आले.

n	(a, b, c)	T(n)	शेरा
0.	--	0	(000) क्षुल्लक त्रिकोण
1.	--	0	(1, 0 0) हा क्षुल्लक त्रिकोण
2.	--	0	(2, 0, 0), (1, 1, 0) क्षुल्लक त्रिकोण
3.	(1, 1, 1)	1	(2, 1, 0), (3, 0, 0) क्षुल्लक त्रिकोण
4.	--	0	(4, 0, 0), (3, 1, 0), (2, 2, 0), (2, 1, 1) क्षुल्लक त्रिकोण
5.	(2, 2, 1)	1	n = 5 ते 14 साठी सर्व त्रिकुटे मांडून क्षुल्लक त्रिकोण सरावासाठी काढा.
6.	(2, 2, 2)	1	
7.	(3, 2, 2), (3, 3, 1)	2	
8.	(3, 3, 2)	1	
9.	(4, 4, 1), (4, 3, 2), (3, 3, 3)	3	
10.	(4, 4, 2), (4, 4, 3)	2	
11.	(5, 5, 1), (5, 4, 2), (5, 3, 3), (4, 4, 3)	4	
12.	(5, 5, 2), (5, 4, 3), (4, 4, 4)	3	
13.	(6, 6, 1), (6, 5, 2), (6, 4, 3)		
	(5, 4, 4), (5, 5, 3)	5	
14.	(6, 6, 2), (6, 5, 3), (6, 4, 4), (5, 5, 4)	4	
	.	.	
	.	.	
	.	.	

कोष्टक (5)

कोष्टक (5) चिकित्सा पद्धत वापरून केले आहे. ही रीत मोठ्या संख्यांना कंटाळवाणी होत जाते. n = 1235, n = 133249 अशा भव्य संख्यांना कशी उपयोगी पडणार ? ते शक्य नाही.

कोष्टक - 5 मध्ये प्रत्येक n साठी T(n) संख्या काढावी लागते. यातून T(n) ची श्रेणी तयार होते ती अशी.

(0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 4,...).

ही श्रेणी n च्या वाढत्या किंमतीबरोबर वाढतेच असे दिसत नाही T(n) संख्या कमी जास्त होत असताना दिसतात.

मूळात हा प्रश्न भूमितीमधील आहे. पण तो (7) या समीकरणात आला व बीजगणितीय बनला. तो असा; कोणत्याही n या नैसर्गिक संख्येची तीन नैसर्गिक संख्येत विभागणी करा ती अशी की,

$n = a + b + c, \quad a + b > c, \quad b + c > a, \quad c + a > b.$

अशी किती त्रिकुटे T(n) असतील ?

या समीकरणाची उत्तरे T(n) इतकी असतात. भूमिती आणि बीजगणित विषय वेगळे असले तरी गणित विषय एकमेकांच्या सहकार्याने प्रगत होतो त्याचे हे एक उदाहरण.

T(n), n = 1, 2, 3,.... या श्रेणीतील संख्याचा अभ्यास शास्त्रज्ञांनी केला व तेथे येणाऱ्या संख्या गणिती तत्वाने मिळतात असे सुचवले. शोध घेतल्यावर मिळालेली 4 सूत्रे क्रमाने पुढे दिली आहेत.

1) $T_n = T_{n-3}$, n ही संख्या सम असताना;

$= T_{n-3} + \frac{n}{4} + \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{4}$, जेव्हा n विषम असेल.

वर दिलेल्या कोष्टकातील n व Tn या संख्या वरील सूत्रानुसार येतात. ते पडताळून पाहू.

n = 13 ही संख्या विषम आहे. वरील सूत्राप्रमाणे

$$T_{13} = T_{13-3} + \frac{13}{4} + \frac{(-1)^{\frac{13+1}{2}}}{4}$$

$$= T_{10} + \frac{13}{4} + \frac{(-1)^7}{4}$$

$$= 2 + 3\frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$= 5$$

हे पाच त्रिकोण वरील कोष्टक (5) मध्ये दिले आहेत.

n = 14 साठी वर दिलेले सूत्र वापरून (14 ही सम संख्या आहे)

$T_n = T_{n-3}$

$T_{14} = T_{14-3} = T_{11} = 4$

सरावासाठी सर्व कोष्टक (5) तपासून घ्या.

2) खाली दिलेले दुसरे सूत्र वरीलप्रमाणे वापरता येईल.

$$T_n = \left[\frac{n^2}{12}\right] - \left[\frac{n}{4}\right]\left[\frac{n+2}{4}\right]$$

येथे [x] = x हून लहान किंवा बरोबर असलेला मोठ्यात मोठा पूर्णांक होय.

उदाहरणार्थ : [9.5] = 9, [.5 7] = 0, जर n = 13 असेल तर वरील सूत्रानुसार

$$T_{13} = \left[\frac{13^2}{12}\right] - \left[\frac{13}{4}\right]\left[\frac{13+2}{4}\right] = \left[\frac{169}{12}\right] - \left[\frac{13}{4}\right]\left[\frac{15}{4}\right]$$

$= 14 - 3\ (3)$

$= 5.$

जर n = 14 असेल तर

$$T_{14} = \left[\frac{14^2}{12}\right] - \left[\frac{14}{4}\right]\left[\frac{14+2}{4}\right] = \left[\frac{196}{12}\right] - \left[\frac{14}{4}\right]\left[\frac{16}{4}\right]$$

$$= 16 - 3\,(4)$$

$$= 4.$$

(3) T_n ही संख्या खाली दिलेल्या सूत्राने पण काढता येते.

$$T_n = \left[\frac{n^2}{48}\right]$$ जेंव्हा n ही संख्या सम असते;

$$= \left[\frac{(n+3)^2}{48}\right]$$ जेंव्हा n ही संख्या विषम असते.

जर n = 9 असेल तर विषम संख्येसाठी

$$T_9 = \left[\frac{(9+3)^2}{48}\right] = \left[\frac{12^2}{48}\right] = \left[\frac{144}{48}\right] = 3.$$

n = 4, असेल तर

$$T_4 = \left[\frac{4^2}{48}\right] = \left[\frac{16}{48}\right] = \left[\frac{1}{3}\right] = 0.$$

4) वर दिलेल्या कोष्टक - (5) मध्ये आपल्याला

$(T_o, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{14})$
$= (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 4)$

अशी श्रेणी मिळते. एका गणितज्ञाने शोध लावला की

$$T(x) = \frac{x^3}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

ही राशी जर मालिकेनुसार विस्तार लिहिली तर वर दिलेल्या श्रेणीचा शोध घेता येतो. थोडक्यात.

$$T(x) = \frac{x^3}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

$$= x^3 (1 - x^2)^{-1} (1 - x^3)^{-1} (1 - x^4)^{-1}$$

$$= T_o + T_1x + T_2 x^2 + T_3 x^3 + T_4x^4 + ... + T_{14}x^{14} + ...$$

$$= x^3 + x^5 + x^6 + 2x^7 + x^8 + 3x^9 + 2x^{10} + 4x^{11} + 3x^{12} + 5x^{13} + 4x^{14} + ...$$

असे सिद्ध करावे लागेल. या सिद्धतेसाठी बीजगणितातील बॉयनॉमिअल प्रमेय (Binomial Theorem) माहीत हवे. याला द्विपद सिद्धांत असे म्हणतात. हे प्रमेय शाळेत सामान्यत: शिकवले जात नाही. हे सूत्र खरे आहे असे आपण गृहित धरू. आता n लांबीच्या

काठीचे वेगवेगळ्या ठिकाणी तुकडे करून T(n) किती होतात हे समजण्यासाठी वरील राशीतील x^n चा सहगुणक कोणता आहे ? या प्रश्नाचे उत्तर आहे.

जेथे केलेल्या लेखनातून गणिताचे ज्ञान टप्प्याटप्प्याने कसे वाढत जाते ते लक्षात येते. गणितात जरी शेकडो उदाहरणे चाचणी पद्धतीने सोडवली तरी प्रश्न समाधानकारकपणे सुटला असे मानत नाहीत. n या सर्वसाधारण संख्येला योग्य असेल असे सूत्र काढेपर्यंत दिलेल्या प्रश्नाचे उत्तर पूर्ण मिळाले असे होत नाही. त्यामुळे गणितज्ञ सूत्र मिळवण्याच्या मागे लागतात. चाचणी पद्धतीने केलेले कोष्टक (5) आता वर दिलेल्या सूत्रांनी तपासून घेता येतील. याचा अर्थ चाचणी पद्धत निरूपयोगी आहे असे मात्र होत नाही. या पद्धतीने मिळालेल्या संख्या सूत्रे मिळवण्यासाठी वापरल्या आहेत. आता 100 ही संख्या घेऊन आपण T(n) ही संख्या काढू. दुसऱ्या सूत्राप्रमाणे

$$T_{100} = \left[\frac{100^2}{12}\right] - \left[\frac{100}{4}\right]\left[\frac{100+2}{4}\right]$$

$$= \left[\frac{10{,}000}{12}\right] - 25\,[\,25.5\,]$$

$$= 833 - 25 \times 25 = 833 - 625$$

$$= 208.$$

आता 100 फूट लांबीची काठी मिळणे अवघड आहे. म्हणून काठी ऐवजी 100 फूट लांबीचा दोरा घेऊ. तो विविध ठिकाणी तोडला तर 208 त्रिकोण मिळतील.

या उलट पहिले सूत्र वापरले तर

$T_{100} = T_{100-3} = T_{97}$ होय.

T_{97} आपल्याला माहीत नाही. म्हणून T_{97} साठी आपण दुसरे सूत्र वापरू :

$$T_{97} = \left[\frac{97^2}{12}\right] - \left[\frac{97}{4}\right]\left[\frac{97+2}{4}\right]$$

$$= \left[\frac{9409}{12}\right] - \left[\frac{97}{4}\right]\left[\frac{99}{4}\right] = \left[784\frac{1}{12}\right] - \left[24\frac{1}{4}\right]\left[24\frac{3}{4}\right]$$

$$= 784 - 24 \times 24 = 784 - 576$$

$$= 208$$

आता $T_{100} = T_{97} = 208$ तिसरे सूत्र 97 या विषम संख्येसाठी योजले तर

$$T_{97} = \left[\frac{(97+3)^2}{48}\right] = \left[\frac{(100)^2}{48}\right]$$

$$= \left[\frac{10{,}000}{48}\right] = \left[\frac{625}{3}\right] = \left[208\frac{1}{3}\right]$$

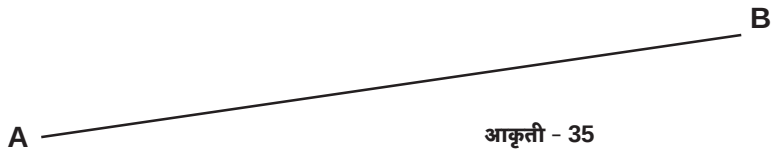
$$= 208.$$

वर दिलेली तीन सूत्रे वापरून आपल्याला T(100) = 208 ही संख्या मिळाली.

❑ ❑ ❑

8. टॅक्सी - भूमिती

1 ते 7 या विभागात आपण त्रिकोण आकृतीचा अभ्यास केला. या विभागात एक नवीन प्रकारची भूमिती विचारात घेणार आहोत.



आकृती - 35

समतलावर असलेल्या बिंदूतील अंतर फूटपट्टी घेऊन मोजता येते. बिंदू A पासून बिंदू B पर्यंत जाण्यासाठी अनेक मार्ग काढता येतील. पण वरील आकृती - 35 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे जर सरळ गेलो तर हे अंतर सर्वात कमी असते. अन्य मार्गाने गेलो तर अंतर वाढते. बिंदू A व B यांना जोडणारे सर्वात कमी अंतर आपण d (A, B) या चिन्हाने व्यक्त करू. येथे d हे अक्षर 'अंतर' (distance) नमूद करण्यासाठी योजले आहे. ते इंच, फूट, किलोमीटर, मैल या एककाने निर्देशित करता येते. युक्लिडने अंतराची ही व्याख्या सर्व भूमितीत उपयोजली आहे. भूमितीतील अनेक प्रमेये, सूत्रे असलेले "Element' या नावाचे पुस्तक त्याने लिहिले तेथे त्याने d (A, B) ही अंतराची संकल्पना वापरली. अंतर मोजण्यास ही व्याख्या खूपच सोपी आहे. व ती आपल्या रोजच्या व्यवहारात उपयुक्त झाली म्हणून युक्लिडची भूमिती 'व्यावहारिक भूमिती' ठरली.

दोन बिंदूतील अंतर d (A, B) ने व्यक्त होते. शालेय अभ्यासक्रमात अंतराच्या या व्याख्येच्या आधारावर असलेली भूमिती शिकवली जाते. पण दोन बिंदूमधील अंतर अनंत पद्धतीने मोजता येते. या विभागात अशा सर्व पद्धती दिलेल्या नाहीत. फक्त एकच नवी पद्धत येथे विचारात घेतली आहे. भूमितीच्या रचनेत मग कोणते बदल घडतात याचा निर्देश पण केला आहे. या विवेचनात 'अंतर' ही मूलभूत संकल्पना आहे. त्यामुळे अंतराची व्याख्या प्रथम स्पष्ट करायला हवी. नवीन व्याख्या देताना अंतराच्या मूळ व्याख्येशी मेळ साधला पाहिजे. युक्लिडच्या भूमितीतील अंतरातील मूलभूत तत्वे आता समजून घेऊ. वरील आकृतीत A आणि B हे बिंदू दिलेले आहेत. त्यामधील अंतराला d (A, B) = d_E (A, B) असे म्हणू. येथे E हे अक्षर Euclid चे अंतर दाखवण्यासाठी योजले आहे. आता युक्लिड अंतराचे काही गुणधर्म लक्षात घेऊ.

(अ) d_E (A, B) $\geq$ 0; याचा अर्थ प्रतलावरील दोन बिंदूतील अंतर धन किंवा शून्य असते. थोडक्यात ते ऋण संख्या कधीच नसते.

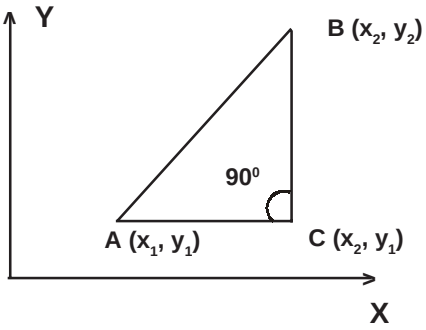
(आ) जर A = B असेल तर d_E (A, B) = d_E (B, A) = o याचा अर्थ दोन बिंदू A आणि B जर एकत्र आले तर त्यांच्यामधील अंतर शून्य होते. तसेच अंतर मोजण्यासाठी AB च्या दिशेसंबंधी विचार करण्याची गरज नाही. याउलट जर d_E (A, B) = 0 असेल तर A = B आहे; व्याख्या नेहमी दोनही दिशांनी काम करते.

(इ) आता या प्रतलावरच C हा तिसरा बिंदू घेऊ. त्रिकोण ABC मध्ये d_E (A, B) + d_E (B, C) $\geq$ d_E (C, A)

हे 'त्रिकोणीय असमानता' तत्व सत्य असते. C बिंदू जर AB रेषेवरच असेल तरच येथे समानता अपेक्षित असते.

अंतराची नवीन व्याख्या करताना (अ), (आ), (इ) हे तीन मुलभूत गुणधर्म तपासून घ्यावे लागतील तरच ती व्याख्या असंदिग्धपणे 'अंतर' या संज्ञेला पात्र ठरेल. आता आपण अंतराची दुसरी व्याख्या घेऊ व ती वरील तीन गुणधर्म पाळते का ? हे तपासून घेऊ.

XY आलेखावर आकृती - 35 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे A, B, C बिंदू असे घ्या की $\angle ACB = 90^0$ आणि A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), C (x_2, y_1)



आकृती - 35

येथे,

$AC = | x_1 - x_2 |$

$CB = | y_1 - y_2 |$

आकृती - 35

दोन बिंदूमधील अंतर मोजण्यासाठी आपण । ▪ । हे चिन्ह वापरतो. अंतर नेहमी धन किंवा शून्य संख्या असते. या चिन्हाने अशा संख्या व्यक्त करतात. यालाच केवलमूल्य (Absolute value) म्हणतात.

केवलमूल्य (Absolute value) नेहमी धन अगर शून्य संख्या असते. ते कधीच ऋण संख्या नसते. x ही कोणतीही सत् (Real) संख्या असेल तर केवलमूल्य (absolute value) ची व्याख्या खालीलप्रमाणे करतात :

$| x | = x$, जेव्हा $x > 0$,

$= -x$, जेव्हा $x < 0$,

$= 0$, जेव्हा $x = 0$.

समजा, $x = 9$ आहे तर $| x | = | 9 | = 9$,

$x = -9$ आहे तर $| x | = | -9 | = 9$,

$x = 0$ आहे तर $| x | = | 0 | = 0$.

तसेच जर x आणि y या कोठल्याही दोन सत् संख्या असतील तर

$| x + y | \leq | x | + | y |$ ही असमानता सत्य असते.

आकृती - 35 मध्ये समजा A या ठिकाणी घर आहे व B या ठिकाणी शाळा आहे.

घरातून निघून शाळेत जायचे आहे. घरापासून शाळेला जोडणारा रस्ता सरळ मार्ग असेल तर AB हे अंतर काटावे लागेल. (As the crow flies) हे अंतर युक्लिडीय आहे. पण शहरात दोन ठिकाणी सरळ रेषेने जाता येणे क्वचितच शक्य होते. शहर जर पूर्वनियोजित असेल व रस्ते काटकोनात बांधलेले असतील तर प्रथम A पासून C पर्यंत व नंतर काटकोनात वळण घेऊन C पासून B पर्यंत जावे लागेल. याचा अर्थ घरापासून शाळेपर्यंत अंतर AC + CB एवढे असेल. येथे $AC = | x_2 - x_1 |$ व $CB = | y_2 - y_1 |$ आहे. हे अंतर पायी किंवा टॅक्सीने जावे लागेल. यासाठी घर आणि शाळा मधील अंतर आपण d_T (A, B) या चिन्हाने व्यक्त करू. येथे d हे अक्षर distance साठी व T अक्षर टॅक्सी-प्रवास निर्देशित करण्यासाठी योजले आहे. आता वरील आकृतीत-

$d_T (A, B) = d_E (A, C) + d_E (C, B)$, म्हणजेच

d_T ($(x_1, y_1), (x_2, y_2)$) = $| x_2 - x_1 | + | y_2 - y_1 |$ (8)

= $| x_1 - x_2 | + | y_1 - y_2 |$.

ही टॅक्सी-अंतराची व्याख्या आहे,

याचा अर्थ 'टॅक्सी अंतर' काढताना प्रथम $| x_1 - x_2 |$ काढावे $| y_1 - y_2 |$ काढावे व त्यांची बेरीज करावी असे हे सूत्र निर्देशित करते. उदाहरणार्थ A(3, 4) व B (9, 7) असेल तर A आणि B मधील टॅक्सी अंतर (8) या व्याख्येनुसार

d_T ((3, 4), (9, 7)) = $| 3 - 9 | + | 4 - 7 |$ = $| -6 | + | - 3 |$

= 6 + 3

= 9,

एवढे आहे. टॅक्सीवाला एवढ्या अंतराचे बिल आपल्याला देईल.

आकृती - 35 मध्ये आपल्याला युक्लिडीय अंतरही मोजता येते. Δ ACB हा काटकोन त्रिकोण आहे. म्हणून

$AB^2 = AC^2 + CA^2 = | x_1 - x_2 |^2 + | y_1 - y_2 |^2$

किंवा

$AB = \sqrt{| x_1 - x_2 |^2 + | y_1 - y_2 |^2}$ किंवा (9)

AB = $d_E ((x_1, y_1), (x_2, y_2) = \sqrt{| x_1 - x_2 |^2 + | y, - y_2 |^2}$ होय.

(9) ही युक्लिडीय - अंतराची व्याख्या आहे. हे अंतर आपल्याला परिचित आहेच. वर घेतलेल्या उदाहरणात

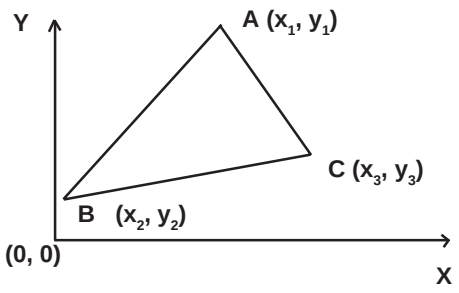
d_E ((3, 4), (9, 7)) = $\sqrt{(3 - 9)^2 + (4 - 7)^2} = \sqrt{6^2 + 3^2}$

= $\sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5}$

= $3\sqrt{5}$.

d_T व d_E ही अंतरे वेगळी आहेत. याचा अर्थ शाळेत जाण्यासाठी मुलाला 9 एवढे अंतर काढावे लागेल पण कावळ्याला $3\sqrt{5}$ हे अंतर उडत जावे लागेल.

आपण आता d_T या अंतरासंबधी विचार केला पण d_T अंतराची जी (8) मधील व्याख्या घेतली आहे ती 'अंतर' या संज्ञेला पात्र आहे का ? ते प्रथम तपासले पाहिजे. यासाठी आपल्याला (अ), (आ) आणि (इ) ही तीन मूलभूत बंधने d_T या व्याख्येला मान्य करावी लागतील. खाली दिलेली आकृती पहा :



आकृती - 36

आकृती - 36 मध्ये (8) ही व्याख्या वापरून :

$$d_T(A, B) = d_T((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

$$d_T(B\ C) = d_T((x_2, y_2), (x_3, y_3)) = |x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|, \qquad (10)$$

$$d_T(C\ A) = d_T((x_3, y_3), (x_1, y_1)) = |x_3 - x_1| + |y_3 - y_1|,$$

ही पदे मिळतात.

(अ) (10) मध्ये आलेली पदे तपासली तर लक्षात येते की $d_T(A, B)$, $d_T(BC)$, $d_T(CA)$ या संख्या धन किंवा शून्य आहेत;

(आ) जर A = B असेल तर $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, म्हणजेच $x_1 = x_2$ व $y_1 = y_2$ आहे. त्यामुळे (10) मध्ये $d_T(A, B) = 0$ सिद्ध होते. याच्या उलट जर $d_T(A, B) = 0$ असेल तर $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 0$ म्हणजेच $x_1 = x_2$ व $y_1 = y_2$ किंवा A = B होय. आपण d_T व्याख्येतील (अ) व (आ) ही दोन्ही विधाने सत्य आहेत हे सिद्ध केले आहे. आता (इ) हे विधान सत्य आहे का ? ते तपासू,

आता आपण सत् संख्यांना सिद्ध असलेले (a आणि b या सत् संख्या आहेत)

$|a + b| \leq |a| + |b|$ हे सूत्र वापरू. येथे $|x_1 - x_3| = |x_1 - x_2 + x_2 - x_3| \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|$ आणि

$|y_1 - y_3| = |y_1 - y_2 + y_2 - y_3| \leq |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3,|$ होय.

दोन्ही बाजूंची बेरीज करून, आपल्याला खालील असमान पदी मिळते.

$$|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| \leq \{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\} + \{|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|\}$$

याचा अर्थ $d_T(C, A) \leq d_T(A, B) + d_T(B, C)$, सिद्ध होते.

म्हणून 'त्रिकोणातील असमानता तत्व' (इ) लागू असल्याचे आपण सिद्ध केले आहे. अंतर ही संज्ञा d_T साठी, आता (अ), (आ) आणि (इ) सिद्ध केल्यामुळे, योग्य ठरली. d_T ही पण अंतराचीच व्याख्या यामुळे मान्य ठरली आहे. जसे युक्लिडची अंतराची व्याख्या भूमितीत प्रतिष्ठित मानली जाते तसाच अधिकार 'टॅक्सी अंतर d_T' ला पण प्राप्त झाला आहे. यासाठी आपण आता काही उदाहरणे समजून घेऊ.

(i) समजा A = (5, 4) आणि B = (1, 2) तर $d_E(A, B)$ व $d_T(A, B)$ ही दोन्ही अंतरे लिहा.

(9) या सूत्रानुसार

$$d_E(A, B) = d_E((5,4), (1, 2))$$

$$= \sqrt{(5 - 1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

आणि (8) या सूत्रानुसार

$$d_T(A, B) = d_T((5, 4), (1, 2)) = |5 - 1| + |4 - 2| = |4 + 2| = 6$$

येथे $d_E(A, B) \neq d_T(A, B)$ आहे.

(ii) कोठल्या परिस्थितीत $d_E(A, B)$ व $d_T(A, B)$ समान असतील ?

A (x_1, y_1) आणि B (x_2, y_2) हे दिलेले बिंदू आहेत. आता

(8) व (9) या सूत्रानुसार

$d_E (A, B) = d_E ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$,

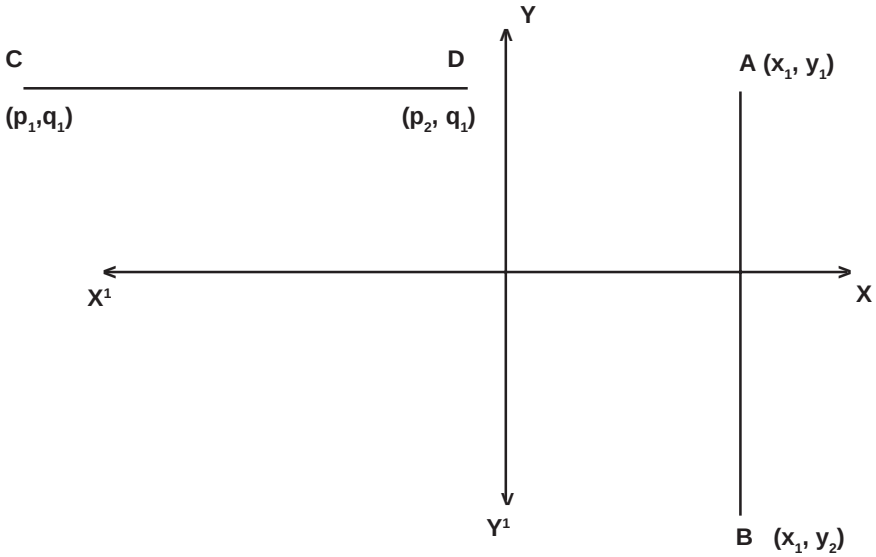
आणि

$d_T (A, B) = d_T ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ आहे.

समजा $|x_1 - x_2| = p$ आणि $|y_1 - y_2| = q$ असेल तर $p + q \geq \sqrt{p^2 + q^2}$

ही असमानता आपल्याला माहित आहे. $p = o$, $q = o$ असेल तर मात्र समानता येते. म्हणजे $p = |x_1 - x_2| = o$; व $q = |y_1 - y_2| = o$ होय. याचा अर्थ $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ किंवा दोन्ही बिंदू A आणि B एकच आहेत.

या उदाहरणात आणखी एक शक्यता तपासू. खाली काढलेली आकृती - 37 पहा.



आकृती - 37

आकृती-37 मध्ये A (x_1, y_1) आणि B (x_1, y_2) हे बिंदू आहेत. येथे AB रेषा Y - अक्षाला समांतर आहे. आता AB हे अंतर d_E व d_T या दोन्ही पद्धतीने काढू :

$$d_E (A, B) = d_E ((x_1, y_1), (x_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$
$$= \sqrt{(y_1 - y_2)^2} = |y_1 - y_2|;$$
$$d_T (A, B) = d_T ((x_1, y_1), (x_1, y_2)) = |x_1 - x_1| + |y_1 - y_2|$$
$$= |y_1 - y_2|$$

म्हणून $d_E (A, B) = d_T (A, B) = |y_1 - y_2|$ होय.

थोडक्यात X - अक्षाला किंवा Y - अक्षाला समांतर असलेल्या कोणत्याही रेषेवर दोन बिंदू घेतले तर त्यामधील युक्लिडीय व टॅक्सी अंतर समान असते.

वरील आकृती-37 मध्ये C (p_1, q_1) व D (p_2, q_1) असेल तर CD रेषा X - अक्षाला समांतर असते. येथे वरीलप्रमाणे

d_E (C, D) = d_T (C, D) आहे का ? ते तपासून पहा. (उत्तर 'होय' असे आहे.)

(iii) जर A (2, 1) बिंदू दिला असेल तर A पासून 3 d_T अंतरावर असलेले 3 बिंदू काढा.

समजा B (x, y) बिंदू A पासून 3 एकक अंतरावर आहे. तर आपल्याला (x, y) बिंदू असे हवेत की,

d_T (A, B) = d_T ((2, 1), (x, y)) = 3

म्हणजे d_T (2, 1), (x, y) = $|2 - x| + |1 - y| = 3$,

B (x, y) = B (o, o) असेल तर d_T (A, B) = $|2| + |1| = 3$,

B (x, y) = B (-1, 1) असेल तर d_T (A, B) = $|2 + 1| + |1 - 1| = 3$,

B (2, -2) असेल तर d_T (A, B) = $|2 - 2| + |1 + 2| = 3$

येथे (0, 0), (-1, 1) आणि (2, - 2) हे बिंदू A (2, 1) या बिंदूपासून 3 टॅक्सी अंतरावर आहेत. हे बिंदू येथे अनुभवाने काढले आहेत. आणखीही काढता येतील.

(iv) A (-2, -1) व B = (3, 2) हे दिलेले बिंदू आहेत. तर { P (x, y) | d_T (P, A) = 3 आणि d_T (P, B) = 5 } हा आलेख काढा.

या उदाहरणात आपल्याला सर्व P (x, y) बिंदू काढायचे आहेत. P (x, y) हे सर्व बिंदू A (-2, -1) या बिंदूपासून 3 टॅक्सी अंतरावर तसेच B (3, 2) या बिंदूपासून 5 टॅक्सी अंतरावर आहेत. हे अंतर 'टॅक्सी अंतर' घ्यायचे आहे. म्हणजेच

d_T (P, A) = d_T ((x, y), (-2, -1)) = $|x + 2| + |y + 1| = 3$;

आणि d_T (P, B) = d_T ((x, y), (3, 2)) = $|x - 3| - |y - 2| = 5$;

सोबत दिलेल्या आलेखावर QRST आणि CDET या दोन आकृत्या काढल्या आहेत. आता खाली दिलेली दोन विधाने तपासू

(अ) QRST या आलेखावरील सर्व बिंदू P (x, y) हे A (-2, -1) या बिंदूपासून 3 टॅक्सी - अंतरावर आहेत.

(ब) CDET या आलेखावरील सर्व बिंदू P (x, y) हे B (3, 2) या बिंदूपासून 5 टॅक्सी - अंतरावर आहेत.

QRST ही आकृती कशी काढली आहे ते प्रथम पाहू. A (-2, -1) हा बिंदू दिला आहे. या बिंदूतून X - अक्ष व Y - अक्ष यांना समांतर असलेल्या रेषा काढा. AT, AQ, AR, AS या सर्व रेषा 3 - टॅक्सी अंतर लांबीच्या आहेत. (समांतर रेषावर युक्लिडीय व टॅक्सी अंतर सारखेच असते. त्यामुळे Q, R, S, T हे बिंदू निर्देशित करता येतात. आता QR, RS, ST आणि TQ या रेषा काढा. आता QRST ही आकृती तयार झाली.

Q, R, S, T बिंदू A (-2, -1) पासून 3 टॅक्सी - अंतरावर आहेत ते स्पष्ट आहेत. QRST आलेखावर आता कोठलाही बिंदू घ्या. हे सर्व P (x, y) बिंदू A (-2, -1) पासून 3 अंतरावर आहे. हे आता सहज तपासून पहाता येईल. (0, 0), (4, 0), (1,1) (-3, -3), ($^7/_2$, $^5/_2$)... हे या आलेखावरील बिंदू A (-2, -1) पासून 3 टॅक्सी अंतरावर आहेत. यासाठी (8) सूत्र दिलेले आहेच. (हे विधान तपासून घ्या)

आता B (3, 2) हा दुसरा बिंदू दिला आहे. या बिंदूपासून 5 - टॅक्सी - अंतरावर असणारे सर्व बिंदूचा संच मिळवायचा आहे. वर दिलेली रचना CDET आकृती काढण्यासाठी येथे योजू. या आकृतीवरील सर्व बिंदू B (3, 2) पासून 5 टॅक्सी - अंतरावर आहेत. C, D, E, T हे बिंदू येथे निर्देशित केले आहेतच. आणखीही काही बिंदू निर्देशित करा.

आकृती - 38 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे TS हा रेषेचा भाग QRST व CDET यांच्यात समान आहे. त्यामुळे या TS वरील सर्व बिंदू A (-2, -1) पासून 3 टॅक्सी - अंतरावर आहे. तर B (3, 2) पासून 5 टॅक्सी - अंतरावर आहेत. हे दिलेल्या प्रश्नाचे उत्तर आहे. या उदाहरणातील सर्व टॅक्सी - अंतरे (8) ही व्याख्या वापरून आणि प्रत्यक्ष आलेखावर मोजता येतील. टॅक्सी - अंतर कोणत्याही परिमेय सहनिर्देशकापासून मोजता येतील. उदाहरणार्थ, TS या रेषेवर K (0.5, 0.5) हा बिंदू आहे. येथे

d_T (A, K) = d_T ((-2, -1), (0.5, 0.5)) = | - 2 + 0.5 | + | -1 - 0.5 |

= | -1.5 | + | -1.5 |

= 1.5 + 1.5

= 3

A पासून K हा बिंदू 3 अंतरावर आहे. तसेच

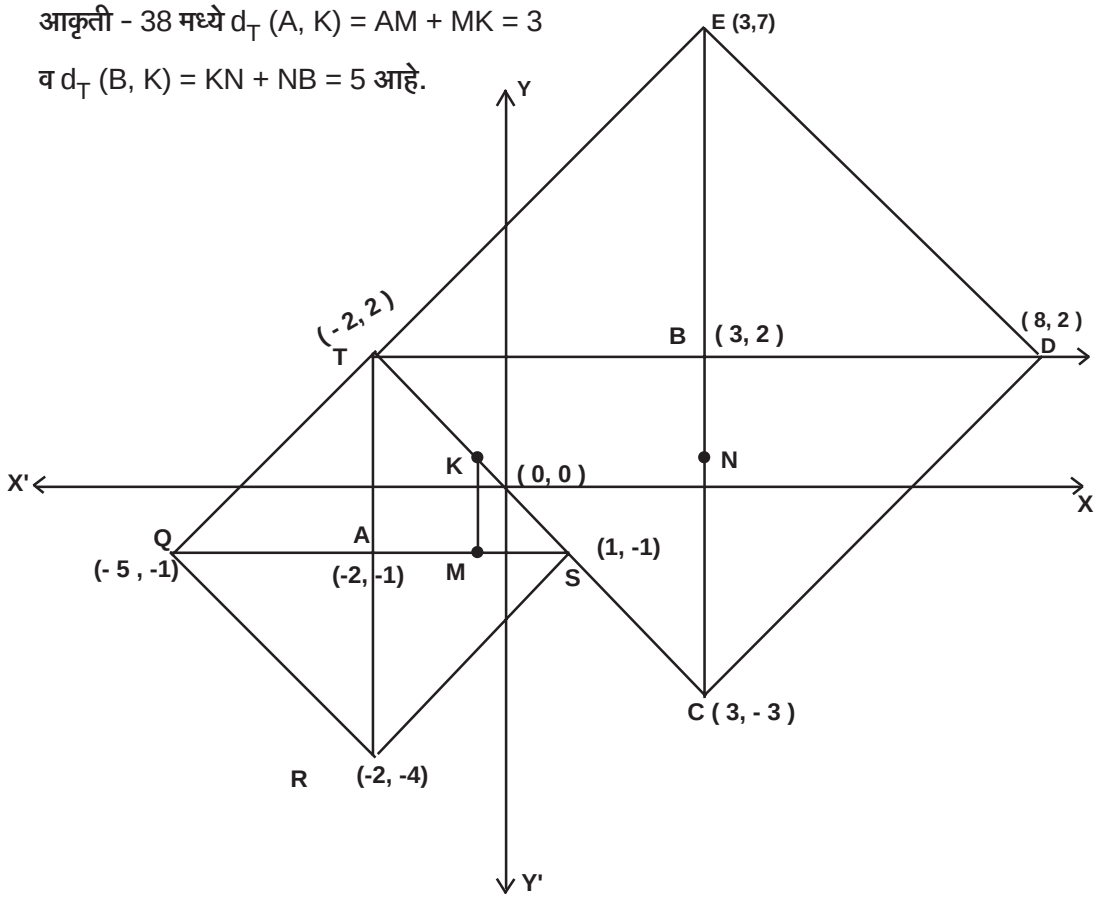
d_T (B, K) = d_T ((3, 2) (0.5, 0.5)) = | 3 + 0.5 | + | 2 - 0.5 |

= | 3.5 + 1.5 | = 3.5 + 1.5 = 5

K (-0.5, 0.5) हा बिंदू A (-2, -1) पासून 3 अंतरावर तर B (3, 2) पासून 5 अंतरावर आहे.

हा निष्कर्ष आलेख पाहूनही काढता येईल.

आकृती - 38 मध्ये d_T (A, K) = AM + MK = 3 व d_T (B, K) = KN + NB = 5 आहे.



आकृती - 38

नगर नियोजन आणि टॅक्सी भूमिती

जगात काही शहरे पूर्वनियोजित आहेत याचा अर्थ मुख्य रस्ते आणि उपरस्ते काटकोनात आखलेले असतात. येथे शहरातील सार्वजनिक उपयोगाच्या इमारती (पोस्ट, बसस्थानक, रेल्वे स्टेशन, शाळा, हॉस्पिटल, बँका, बाजार इत्यादि) नियोजित जागेवरच बांधल्या जातात. अशा शहरातून टॅक्सी अंतर संकल्पना व्यवहारासाठी उपयुक्त ठरते. खालील दोन उदाहरणांनी नगरनियोजन व टॅक्सी भूमिती यामधील संकल्पना स्पष्ट होतील.

(1) एका पूर्वनियोजित शहरात P (-2,4) या जागेवर गाडीला अपघात झाला आहे. यावेळी दोन पोलिसगाड्या A (2, 1) व B (-1, 1) याठिकाणी उभ्या आहेत. यापैकी कोणती गाडी अपघाताच्या जागेपासून जवळ आहे ?

आलेखावरील आकृती - 41 पहा.

P ही अपघाताची जागा आहे. A आणि B याठिकाणी पोलीस गाड्या आहेत. आता आपण PB आणि PA ही टॅक्सी अंतरे मोजू. (पोलीस गाड्या पूर्वनियोजित शहरातील रस्त्यावरून प्रवास करणार आहेत)

$d_T (P, A) = d_T ((-2, 4), (2, 1)) = |-2-2| + |4-1|$

$= |-4| + |3| = 7;$

$d_T (P, B) = d_T ((-2, 4), (-1, 1) = |-2+1| + |4-1| = |-1| + |3|$

$= 1 + 3 = 4.$

येथे $d_T (P, B) < d_T (P, A)$ आहे. याचा अर्थ B येथे असलेली पोलिसांची गाडी अपघाताच्या जागेवर लवकर जाऊन पोचेल.

वर दिलेले उदाहरण सोपे आहे. या गणिताचे उत्तर अनुभवाने पण देता येईल. पण गुंतागुंतीच्या ठिकाणी गणितीय विचार अचूक ठरेल.

(2) अनुप आणि विद्या या दोघांना राहण्यासाठी घर शोधायचे आहे. अनुप औषधाच्या कारखान्यात A (-3, -1) नोकरी करतो, तर विद्या B (3, 3) या ठिकाणी असलेल्या बँकेत कामाला जाते. दोघेही आपल्या कामाच्या ठिकाणी पायी जातात. त्यांनी ठरवले की दोघांचे मिळून एकूण चालण्याचे अंतर कमीत कमी असावे. त्यांनी आपले घर कोठे शोधावे ?

जर दोघांनाही सारखेच अंतर चालावे लागावे असे ठरवले तर घरासाठी कोणती जागा निवडावी ?

आकृती - 42 मध्ये अनुप आणि विद्या यांच्या कामाच्या जागा अनुक्रमे A आणि B बिंदूनी आलेखावर दाखवल्या आहेत. दोघांच्या कामाच्या जागेतील टॅक्सी - अंतर d_T

$d_T (A, B) = d_T ((-3, -1), (3, 3)) = |-3-3| + |-1-3|$

$= |-6| + |-4| = 6 + 4 = 10$

आहे. आकृती - 42 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे PAQB या आकृतीत आलेल्या कोठल्याही बिंदूवर घर घेतले तरी दोघांना मिळून एकूण चालायचे टॅक्सी अंतर 10 एवढेच आहे. त्यामुळे अनुप आणि विद्या यांनी या PAQB या आकृतीच्या आतील बाजूस कोठेही घर शोधावे. हे अंतर सर्व ठिकाणी 10 आहे. आकृतीच्या बाहेर घर शोधले तर मात्र त्यांना 10 पेक्षा जास्त अंतर चालावे लागेल.

समजा $C (x, y) = C \left(\frac{13}{10}, \frac{2}{10} \right)$ येथे घर घेतले

येथे घर घेतले तर आपण दोघांचे एकूण चालण्याचे टॅक्सी अंतर काढू.

$d_T(A, C) = \left(d_T(-3, -1), \left(\frac{-13}{10}, \frac{2}{10}\right)\right)$

$= \left|-3 + \frac{13}{10}\right| + \left|-1 - \frac{2}{10}\right| = \left|-\frac{17}{10}\right| + \left|-\frac{12}{10}\right|$

$= \frac{17}{10} + \frac{12}{10} = \frac{29}{10}$

$d_T(C, B) = d_T\left(\left(-\frac{13}{10}, \frac{2}{10}\right), (3, 3)\right) = \left|\frac{-13}{10} - 3\right| + \left|\frac{2}{10} - 3\right|$

$= \left|-\frac{43}{10}\right| + \left|-\frac{28}{10}\right| = \frac{71}{10}$

दोन्ही टॅक्सी अंतराची बेरीज $\frac{29}{10} + \frac{71}{10} = 10$ आहे.

या उदाहरणाच्या दुसऱ्या भागात अनुप आणि विद्या यांना सारखेच अंतर चालण्याची अट आहे. PAQB या आकृतीत L(x,y) याठिकाणी घर आहे असे समजू तर

$d_T(A,L) = d_T((-3,-1), (x,y)) = |x+3| + |y+1|$

$d_T(B,L) = d_T((3,3), (x,y)) = |x-3| + |y-1|$.

आपल्याला (x,y) मिळविण्यासाठी खालील समीकरण सोडवावे लागेल. म्हणून

$d_T(A,L) = d_T(B,L)$

म्हणजे $|x+3| + |y+1| = |x-3| + |y-3|$.

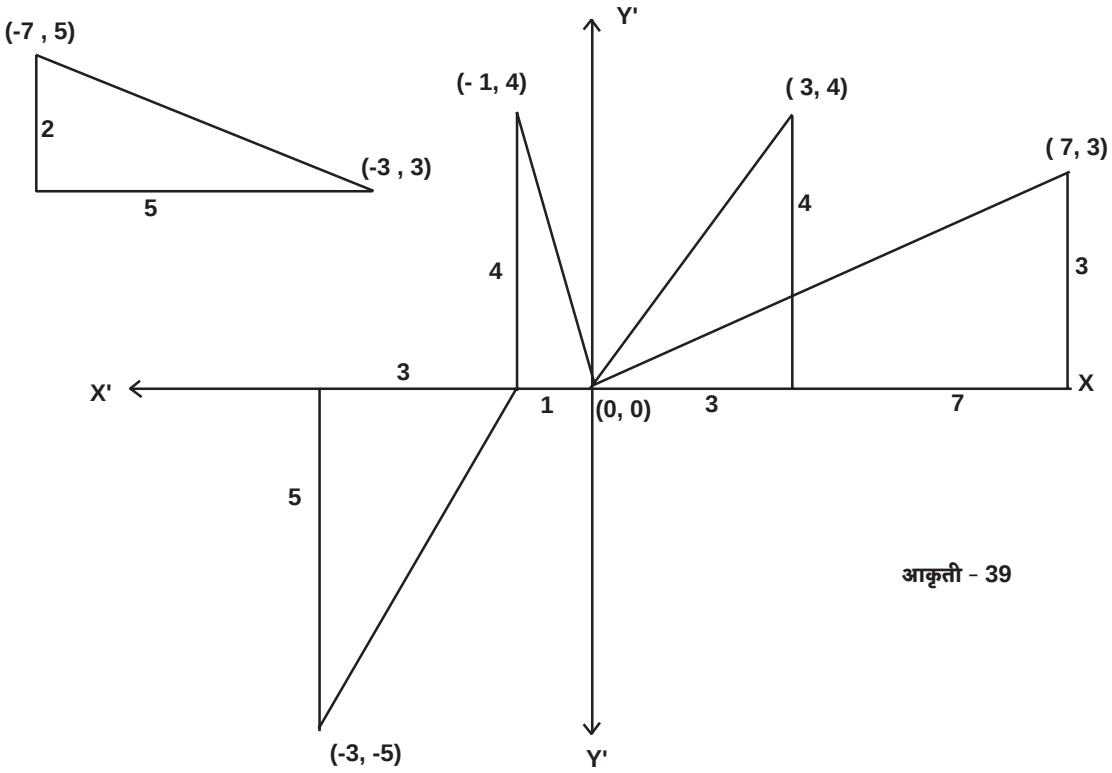
याचा अर्थ $(x+3) = (3-x)$ व

$(y+1) = (3-y)$ होय.

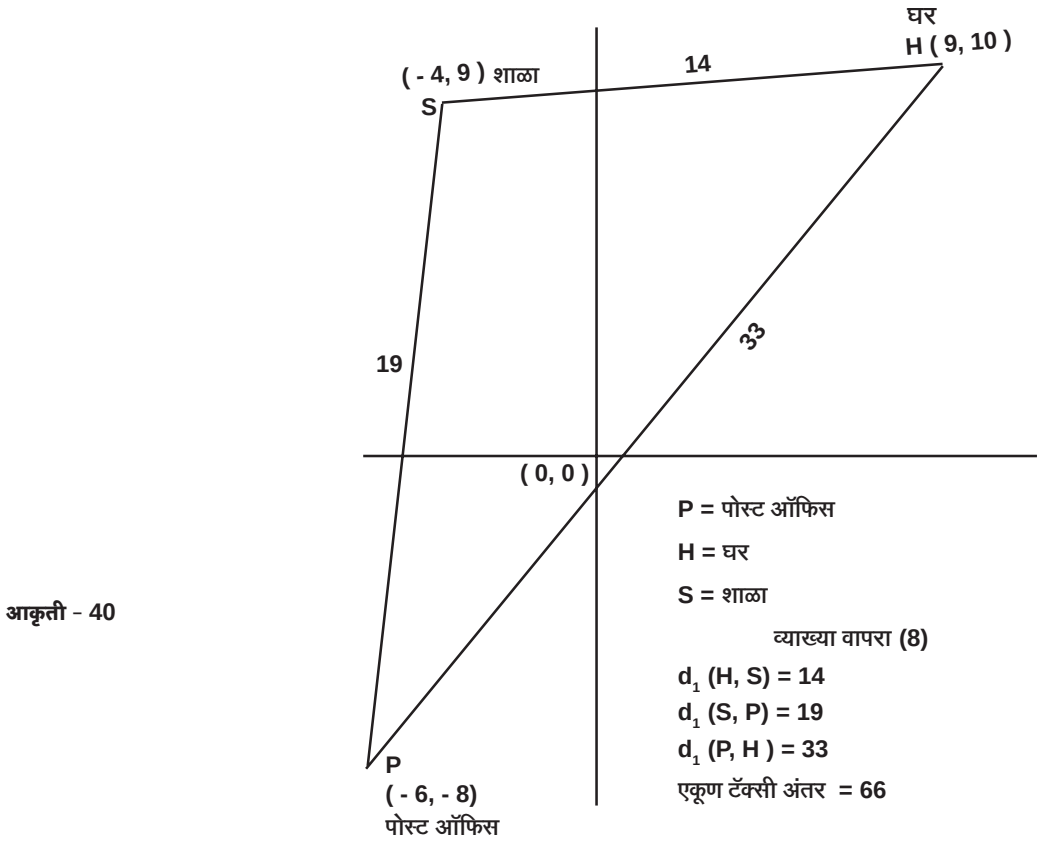
म्हणून $x=0$ आणि $y=1$ व $L(x,y) = L(0,1)$.

अनुप आणि विद्या यांचे घर L ठिकाणी असेल तर त्यांना त्यांच्या नोकरीच्या ठिकाणी समान अंतर चालावे लागेल.

येथे सोडवलेली दोन्ही उदाहरणे सोपी आहेत. नागरी वस्तीत राहणाऱ्या नागरिकांना वारंवार अशा समस्यांना तोंड द्यावे लागते. आपण शाळेत शिकत असलेल्या भूमितीत या स्वरूपाची उदाहरणे सहसा येत नाहीत. टॅक्सी भूमितीत वेगळ्या प्रकारचे प्रश्न असतात. या प्रकारच्या भूमितीची उपयुक्तता लक्षात येण्यासाठी ही उदाहरणे उपयुक्त आहेत.



आकृती - 39



आकृती - 40

P = पोस्ट ऑफिस

H = घर

S = शाळा

व्याख्या वापरा (8)

d_1 (H, S) = 14

d_1 (S, P) = 19

d_1 (P, H) = 33

एकूण टॅक्सी अंतर = 66

पाठ

टॅक्सी - अंतर मोजण्याचा सराव होण्यासाठी काही पाठ खाली दिले आहेत.

(1) खाली दिलेल्या बिंदूमधील टॅक्सी अंतर आलेखावरुन मोजा.

अ) (0, 0), (3, 4), ... (7)

आ) (0, 0), (7, 3), ... (10)

इ) (0, 0), (-1, 4), ... (5)

ई) (0, 0), (-3, -5) (8)

ऊ) (-3, 3), (-7, 5) (7).

आलेख आकृ ती 39 मध्ये काढले आहेत .

उजवीकडील कंसात उत्तरे दिली आहेत.

(2) खाली दिलेल्या बिंदूतील टॅक्सी-अंतर व्याख्या (8) योजून काढा.

अ) (4, 5), (7, 9) (7)

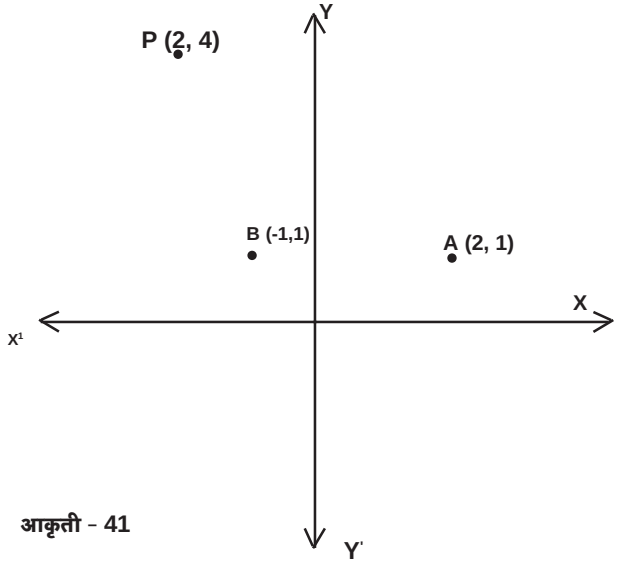
आ) (-7, 8), (7, 5) (17)

इ) (-9, -10), (-3, -4) (12)

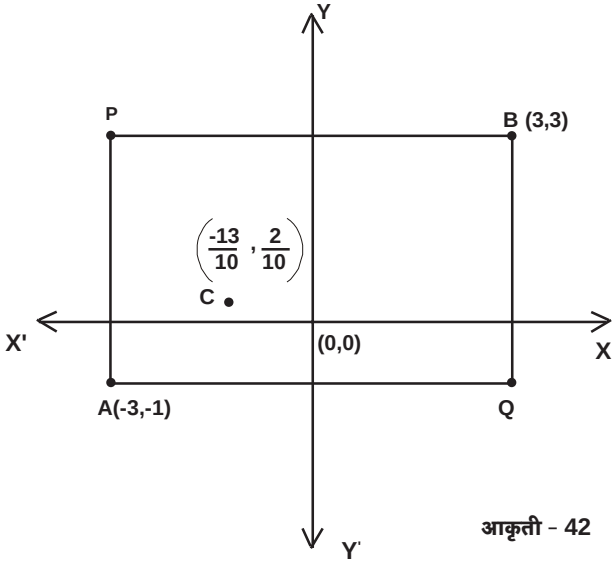
ई) (11, -9), (-4, 5) (29)

फ) (4, -6), (-6, 4) (20).

(3) शरदचे घर (9,10) या बिंदूवर, शाळा (-4, 9) बिंदूवर व पोस्ट ऑफिस (-6, 8) या बिंदूवर आहे. त्याला शाळेत जाऊन एक दाखला मिळवायचा आहे व तो नंतर पोस्टाने पाठवायचा आहे व घरी परत यायचे आहे. त्याला एकूण किती टॅक्सी अंतर चालावे लागेल ? शरद पोस्टातून घरी आला तर तो किती टॅक्सी अंतर चालेल ? (उत्तर मिळवण्यासाठी आलेख कागदावर आकृती - 40 काढावी. तसेच यासाठी टॅक्सी-अंतराची व्याख्या वापरा. (उत्तरे : 66, 33)



आकृती - 41



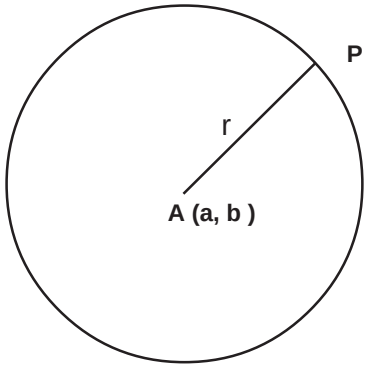
आकृती - 42

भूमितीत वर्तुळ या आकृतीला महत्वाचे स्थान आहे. युक्लिडीय भूमितीत वर्तुळाची व्याख्या अशी दिली जाते :

(a, b) या दिलेल्या स्थिर बिंदूपासून दिलेल्या अंतर r वर असणाऱ्या सर्व बिंदूचा संच म्हणजे वर्तुळ होय. या व्याख्येत 'अंतर' हा शब्द महत्त्वाचा आहे. आपल्याला आता (i) युक्लिडीय अंतर व (ii) टॅक्सी-अंतर हे प्रकार माहीत आहेत त्यामुळे या विभागात दोन वर्तुळे काढता येतील. व्याख्येत (a, b) हा स्थिर बिंदू दिला आहे त्याला वर्तुळाचा केंद्रबिंदू म्हणतात. तर दिलेले अंतर r या चिन्हाने वर्तुळाची त्रिज्या व्यक्त होते. आता आपण दोन वर्तुळे काढू.

(3) **यु-वर्तुळ** (Euclidean Circle)

हे वर्तुळ काढताना युक्लिडीय अंतर आपण लक्षात घेणार आहोत. म्हणून या आकृतीला यु-वर्तुळ म्हटले आहे. या आकृतीचा आलेख आपल्या परिचयाचा आहे. तो आकृती-43 मध्ये दाखवला आहे.



आकृती - 43

केंद्रबिंदू A(a, b)पासून वर्तुळावरील P (x, y) हा चलबिंदू r (त्रिज्या) अंतरावर आहे. AP = r हे अंतर युक्लिडीय आहे. म्हणून $r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ होय.

येथे आपण (9) मधील अंतराची व्याख्या उपयोगात आणली. संचाच्या भाषेत आकृती-43 मधील वर्तुळ खाली दिल्याप्रमाणे लिहिता येईल.

$$\text{यु-}\odot = \{ P(x, y) : d_E (P (x, y), (a, b)) = r \} \qquad (11)$$

$$= (P (x, y) : \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r)$$

(4) **टी-वर्तुळ** (Taxi-Circle)

या टी-वर्तुळात आपण केंद्रबिंदू A(a, b) व चलबिंदू P(x, y) यामधील r त्रिज्येची मोजणी टॅक्सी-अंतर योजून करणार आहोत. याचा अर्थ $r = d_T ((x, y), (a, b)) = | x - a | + | y - b |$ होय. हे अंतर (8) मध्ये दिलेल्या व्याख्येने येथे निर्देशित केले आहे. आता टी-वर्तुळ संचाच्या स्वरुपात लिहू : ते असे :

$$\text{टी -}\odot = (P (x, y) : d_T ((x, y), (a, b)) = r) \qquad (12)$$

म्हणजेच

टी- $\odot = (P (x, y) : | x - a | + | y - b | = r)$ होय.

वर (11) मध्ये यु-वर्तुळ व (12) मध्ये टी-वर्तुळ यांच्या व्याख्या संच स्वरुपात दिल्या आहेत. या व्याख्यांची तुलना केली तर दोन्ही

संच एकाच स्वरूपाचे आहेत फक्त E एवढी T हे चिन्ह लिहिले आहे. या बदलामुळे दोन्ही वर्तुळे वेगळी आहेत हे सहज लक्षात येते.

टी-वर्तुळ आलेखावर कसे दाखवता येईल ते आपण दोन उदाहरणे घेऊन पाहू.

समजा, वर्तुळाचा केंद्रबिंदू (a, b) = (-2, -1) आहे व त्रिज्या 3 आहे. (12) मध्ये दिलेल्या वर्तुळाच्या व्याख्येनुसार

टी - $\odot$ = (P (x, y) : d_T ((x, y), (-2, -1))) = 3

= (P (x,y) : I x + 2 I + I y + 1 I = 3)

या वर्तुळावर असणारे काही बिंदू आपण तपासू हे बिंदू येथे अनुभवाच्या आधाराने दिले आहेत. ते कसे मिळवायचे ते एकदा समजले की आणखीही बिंदू काढता येतील.

येथे P (-2, -4), P (1, -1), P $\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}\right)$ P $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-7}{2}\right)$ P (0, 0) P (-2, 2)

हे बिंदू टॅक्सी - अंतर वर्तुळावर आहेत कारण

d_T ((-2, -4), (-2, -1)) = I -2 + 2 I + I -4 + 1 I = 3,

d_T ((1, -1), (-2, -1)) = I 1 + 2 I + I -1 + 1 I = 3,

$d_T\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}\right)(-2, -1)\right) = I\frac{1}{2} + 2 I + I\frac{-3}{2} + 1 I = 3,$

$d_T\left(\left(\frac{-3}{2}, \frac{-7}{2}\right)(-2, -1)\right) = I\frac{-3}{2} + 2 I + I\frac{-7}{2} + 1 I = 3,$

d_T ((0, 0) , (-2, -1)) = I 0 + 2 I + I 0 + 1 I = 3,

d_T ((-2, 2) , (-2, -1)) = I-2 + 2 I + I 2 + 1 I = 3,

वर दिलेले सर्व बिंदू टॅक्सी अंतर वर्तुळावर आहेत. या वर्तुळाचा मध्यबिंदू (-2, -1) या ठिकाणी आहे आणि त्याची त्रिज्या 3 आहे. आता तुम्ही आणखी काही बिंदू असेच शोधून काढा. हे सर्व बिंदू आलेख - कागदवर नोंदून पहा. आता आपल्या सहज लक्षात येईल की या टॅक्सी - अंतर वर्तुळाची आकृती - 44 मध्ये काढलेल्या आलेखासारखी असेल.

आकृती - मधील QRST हा आलेख टी - वर्तुळ आहे. याचा केंद्रबिंदू A (-2, -1) आहे व त्रिज्या 3 आहे. याचा अर्थ या आलेखावरील कोणताही बिंदू P (x, y), A (-2, -1) पासून 3 T- अंतरावर आहे. आपल्याला परिचित असलेल्या वर्तुळापेक्षा आकृती - 44 वेगळी वाटते. असे होणारच कारण येथे आपण अंतराची व्याख्या बदलली आहे येथे d_T (P, A) हे अंतर 3 आहे असे गृहीत धरले आहे. आणखी एक टी - वर्तुळ काढू.

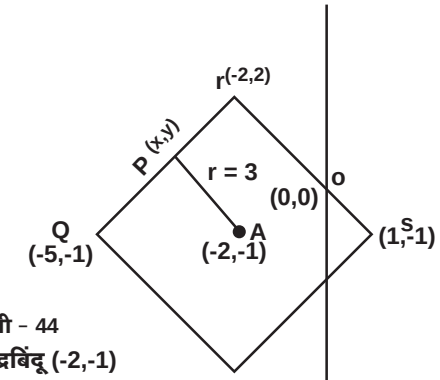
आकृती - 45 मध्ये A (3, 2) हा केंद्रबिंदू व त्रिज्या 4 असलेले टी - वर्तुळ काढलेले आहे. आलेखावर कांही बिंदू निर्देशित केले आहेत. हे सर्व बिंदू A (3, 2) पासून 4 या टॅक्सी - अंतरावर आहेत का ते तपासून पहा. हा आलेख कागद आहे. त्यामुळे आलेख CDET वर आता कोणताही बिंदू घ्या (ज्याचे सहनिर्देशक पूर्णांक किंवा अपूर्णांक आहेत) व असे सर्व बिंदू A (3, 2) पासून 4 - टॅक्सी अंतरावर आहेत का ते तपासून पहा.

आलेख CDET गणितीय भाषेत आता

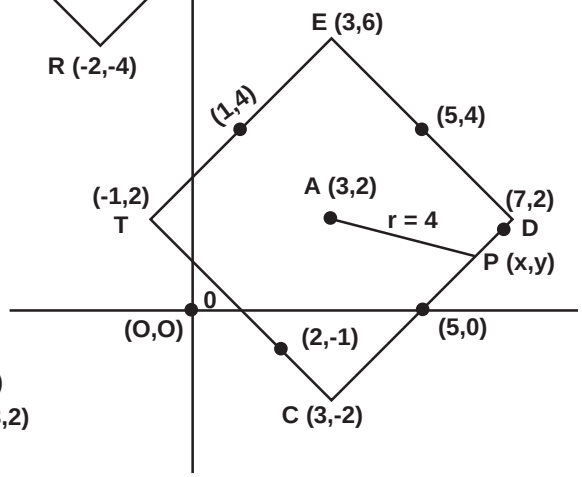
$T\text{-}\odot = \{ P(x, y) : d_T((x, y), (3, 2) = 4 \}$

$= \{ p(x, y) : |x - 3| + |y - 2| = 4 \}$

असा लिहिता येतो.



आकृती - 44
T-वर्तुळ, केंद्रबिंदू (-2,-1)
त्रिज्या 3



आकृती - (2,45)
T- वर्तुळ, केंद्रबिंदू (3,2)
त्रिज्या 4

खरे तर आकृती-44 व आकृती-45 ही दोन्ही टी - वर्तुळे आपण अगोदरच काढली आहेत. (पहा : आकृती - 38) पण आपण त्यावेळी या आकृत्या वर्तुळे आहेत असे म्हटले नव्हते. या आकृत्या कशा काढाव्यात ते देखील तेथे सांगितले आहेच. त्यामुळे आकृत्या - 44, 45 काढणे आता सोपे वाटेल.

वरील दोन उदाहरणावरून भूमितीतील आकार कसे बदलत जातात ते लक्षात येते. शहर नियोजनात टॅक्सी-भूमितीचा उपयोग होतो. आणखी काही उपयोजिता आहेत. या सर्व येथे सविस्तरपणे दिलेल्या नाहीत. खाली दिलेल्या टॅक्सी - अंतर वर्तुळाचे आलेख काढा.

i) $\{ P(x, y) / d_T ((x, y), (0, 0)) = 2 \}$

ii) $\{ P(x, y) / d_T ((x, y), (1, 1)) = 5 \}$

ही वर्तुळे काढण्यासाठी आलेख - कागद वापरा. प्रत्येक वर्तुळावरील 10 बिंदूचे सहनिर्देशक काढा.

टॅक्सी भूमितीत आता लंबवर्तुळ (Ellipse), अन्वस्त (Parabole), अपास्त (Hyperbola) या आकृत्याही पारंपरिक भूमितीपेक्षा वेगळ्या वाटतील. त्या येथे दिल्या नाहीत. त्रिमिती (3-dimension) मध्ये T - वर्तुळ T - गोल आकृतीत कसे परावर्तित होईल याचाही विचार करता येईल.

आपण शाळेत युक्लिडीयन भूमिती शिकतो त्यामुळे वर्तुळाची परंपरागत आकृती आपल्या मनावर ठसलेली आहे. पण 'अंतर' ही कल्पना बदलली की ही आकृतीही बदलते. अंतर या संकल्पनेवर आधारलेल्या सर्वच आकृत्या आता वेगळ्याच दिसतील त्यामुळे परंपरेने लक्षात राहिलेल्या आकृत्या म्हणजे अखेरच्या, अशी मनाची घट्ट ठेवण करून घेण्याचे कारण नाही. या सर्व चर्चेत सांगितलेले गणितीय तत्व एकच आहे ना ? हे मात्र तपासून पहावे लागेल.

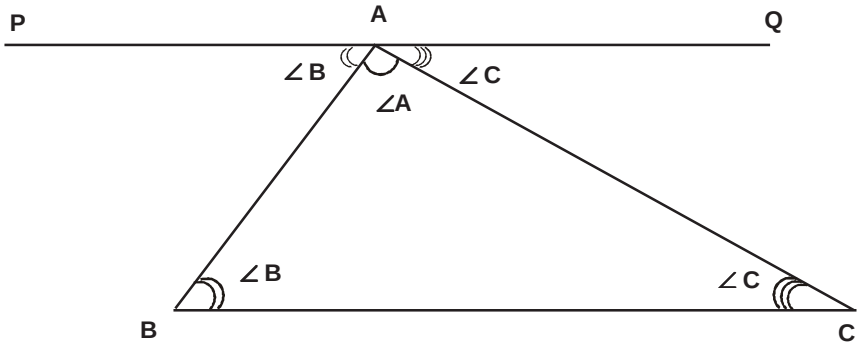
या पुस्तिकेत दोन अंतरांच्या व्याख्या दिलेल्या आहेत. पण दोन बिंदूत अंतर मोजण्याच्या व्याख्या असंख्य आहेत. त्यामुळे अनंत भूमिती प्रकार लिहिता येतील. जशी जशी गरज वाढत जाईल तसे हे भूमिती प्रकार उलगडत जातात हे लक्षात घेतले पाहिजे. गणितातील विविध शाखा विस्तारत कशा जातात हे समजण्यासाठी वर दिलेले अयुक्लीडीय अंतराचे उदाहरण दिलेले आहे.

सुमारे दोन हजार वर्षे युक्लिडची भूमिती गणित शिक्षणात केंद्रस्थानी राहिली याला कारण रोजच्या व्यवहारासाठी लागणारे भूमितीचे ज्ञान त्यातून मिळत होते. घरबांधणी, नगरनियोजन, खेळाच्या मैदानांची रचना, क्षेत्रफळ, घनफळ, वस्तूंचे आकार अशा कितीतरी गरजा या भूमितीने भागवल्या होत्या. त्यामुळे आजही युक्लिडचा मान गणित क्षेत्रात अबाधित राहिला आहे. या लहानशा पुस्तिकेत हा सर्व इतिहास सविस्तर लिहिणे शक्य नाही व तशी गरजही नाही. म्हणून फक्त येथे थोडक्यात उल्लेख केला. एक महत्वाचा मुद्दा म्हणजे या भूमितेच्या उपयुक्ततेवर मर्यादा आहेत. त्रिकोणनगरीतील ही भूमिती राजरस्ता आहे असे मात्र मान्य केलेच पाहिजे.

भूमितीय रचना

युक्लिडची भूमिती शिकताना शिक्षक आणि विद्यार्थ्यांना काही अडचणी जाणवतात. मग अनेक प्रमेयांची सिद्धता लिहिण्यासाठी काही भूमितीय रचना - सोप्या किंवा अवघड - लक्षात घ्याव्या लागतात. उदाहरणार्थ :

'त्रिकोणाच्या तीन अंतर्गत कोनांची बेरीज 2 काटकोन एवढी असते' या प्रमेयाची सिद्धता देताना खाली दाखवलेली भूमितीय रचना करावी लागते. मग सिद्धता सहज लिहिता येते.



आकृती - 46

या आकृतीत $\angle A + \angle B + \angle C = 180^{o}$ हे स्पष्ट लक्षात येते. येथे PQ रेषा BC रेषेला समांतर रेषा काढली आहे.

❑ ❑ ❑

9. उत्क्रांत भूमितीच्या काही शाखा

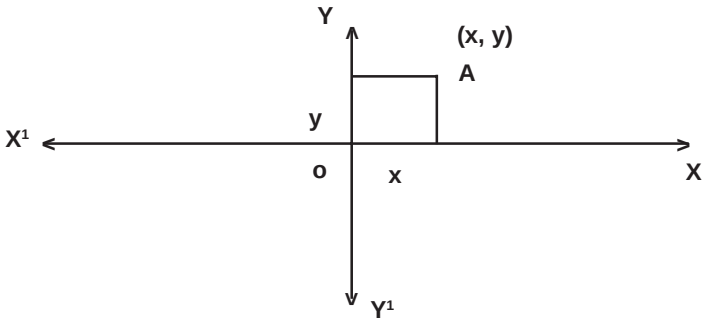
आपण शालेय भूमितीला काहीसा वळसा घालून त्रिकोणासंबंधी काही प्रश्नांची चर्चा केली आणि अंतराच्या परिचित व्याख्येलाही अंतरावर ठेवले. भूमिती हा विषय गणितात विशेष महत्वाचा मानला जातो. या विषयातील प्रमेये, सूत्रे ज्ञानाच्या अन्य शाखात उपयुक्त ठरली आहेत. हे विधान पुढे केलेल्या लेखनातून क्रमाने उलगडत जाईल. या कारणाने भूमिती विषय सातत्याने प्रवाही राहिला आहे. याचाही अंदाज या विभागातील लेखनामुळे येईल.

"The Elements' हा युक्लिडचा ग्रंथ एवढा गाजला की नंतरची 2000 वर्षे तो शाळांतून क्रमिक ग्रंथ म्हणून नियोजित केला होता. जगातील कोणतेही क्रमिक पुस्तक इतके वर्षे शाळांतून लावले गेलेले नाही. परिणामी युक्लिडचे नाव गणिती म्हणून शतकानुशतके लहान थोरांच्या ओठावर टिकून राहिले आहे.

पण या शास्त्रज्ञाने लिहिलेल्या ग्रंथातील प्रमेयातून काही गृहीते भूमितीच्या प्रगतीस अडथळ्याची ठरली. 19 व्या शतकाच्या सुरवातीपर्यंत हा घोळ चालू होता. त्याच्या गृहितामध्ये काही अपूर्णता आहे हे गाऊस या गणितज्ञाने उलगडून दाखवले व नवीन भूमिती लिहिली. त्याला आपली भूमिती जिवंतपणी प्रकाशित करण्याचे धैर्य झाले नाही. ती त्याच्या मृत्यूनंतर 1825 च्या सुमारास प्रसिद्ध झाली. या प्रकाशनानंतर भूमितीच्या प्रगतीतील अडथळे दूर झाले व भूमितीच्या विविध शाखा शोधल्या गेल्या. 19 व्या शतकाच्या उत्तरार्धात रीमान याने या भूमितीत मोठी भर घातली व अवकाशासाठी उपयुक्त भूमितीचा शोध लावला. या भूमितीच्या आधारेने अलबर्ट आइनस्टाइन या शास्त्रज्ञाने Theory of Relativity मधील सापेक्षता सिद्धांत सिद्ध केला. इव्हानविच लोबाचेव्हस्की व योहान बोल्याई या भूमिती तज्ञांनी भूमितीच्या अभ्यासात महत्वपूर्ण भर घातली.

देकॉर्त (De Carte) या गणितज्ञाच्या लक्षात एक मूलभूत संकल्पना आली त्याने गणितातील सर्व सत् (Real) संख्यांचा संच लक्षात घेतला व त्याबरोबर सरळ रेषेवरील बिंदूचा संच पण लक्षात घेतला. त्याच्या ध्यानात आले की हे दोन्ही संच तुल्यबल आहेत. याचा अर्थ रेषेवर 0 या संख्येसाठी एक बिंदू निश्चित केला तर प्रत्येक संख्येसाठी एकच बिंदू रेषेवर असतो व प्रत्येक बिंदूसाठी एकच सत् संख्या निश्चित करता येते. याला एकास एक संबंध (One-to-one Correspondence) असे म्हणतात. या शोधामुळे प्रत्येक बिंदूला एक संख्या निश्चित झाली व त्यामुळे भूमिती व संख्या यांचे नाते स्पष्ट झाले.

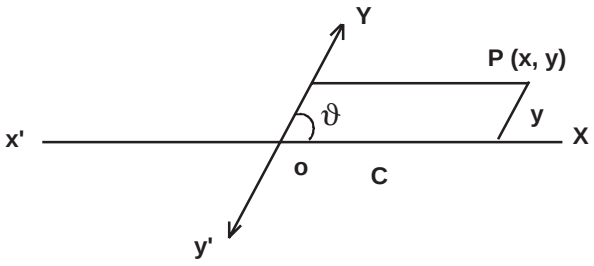
देकॉर्त याने मग काटकोनात छेदणाऱ्या दोन रेषा काढल्या. त्या आकृतीमध्ये दाखवलेल्या आहेत.



आकृती - 47

आता X आणि Y या अक्षांच्या आधाराने A हा समतलावर असलेला बिंदू A (x, y) या सहनिर्देशक दोन सत् संख्यांनी निश्चित करता आला. देकॉर्तच्या या शोधातून वैश्लेषिक भूमिती (Analytical Geometry) या विषयाला सुरूवात झाली. या भूमितीत आता बीजगणीतीय संकल्पना गोवल्या गेल्या व यातून युक्लिडच्या भूमितीला प्रगतीसाठी नवीन साधन मिळाले.

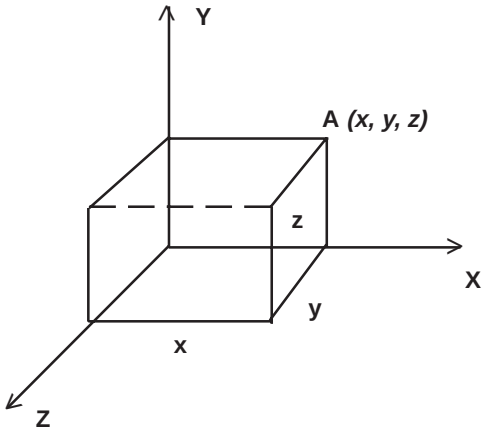
देकॉर्त याने दोन अक्षांतील कोन 90^0 चा घेतला होता. काटकोनामुळे या भूमितीत सोपेपणा नक्कीच आला. पण येथे काटकोनच घ्यायला हवा अशी गरज मात्र नाही. हा कोन कोठलाही चालू शकेल. खाली दिलेली आकृती पहा :



आकृती - 48

वरील आकृतीत दोन अक्षांत xoy हा कोन ϑ एवढा घेतला आहे. अशी अक्षांची रचना पण घेणे शक्य असल्याचे काही गणितज्ञांनी दाखवले. पण या रचनेला लोकमान्यता मात्र मिळाली नाही. कारण या भूमितीत काही त्रिकोणमिती सूत्रे सतत वापरावी लागतात.

वर दिलेली भूमिती सूत्रे, प्रमेये आपण प्रतलावर अभ्यासत असतो. त्यामुळे ही भूमिती द्विमितीत (Two Dimensions) उपयोगात येते. पण व्यवहारात अनेक आकार त्रिमितीय (Three Dimensions) असतात त्यामुळे द्विमितीय युक्लिडीय भूमिती अभ्यासाला अपुरी पडते. या गरजेच्या पूर्ततेसाठी मग त्रिमिती भूमितीचा विकास झाला. या भूमितीत मूलत: युक्लिडीय भूमितीची मूलतत्वेच सामावली आहेत. फक्त दोन अक्षांच्या जागी तीन अक्ष X, Y, Z घ्यावे लागतात. खाली दिलेली आकृती - 48 आपल्या परिचयाची आहेच.



आकृती - 49

वरील आकृतीत तीन अक्ष काटकोनात काढलेले आहेत. A बिंदू त्रिमितीत निश्चित करण्यासाठी *(x, y, z)* हे सहनिर्देशक माहीत असावे लागतात. या त्रिमिती अवकाशामुळे आकाशातील ग्रह-तारे व त्यांचे भ्रमणाचे मार्ग निश्चित करणे सोपे झाले. रॉकेटचा प्रवास-मार्ग आखता आला. त्रिमितीत असणारे सर्व आकार गणितीय पद्धतीने अभ्यासता आले.

वैज्ञानिकांनी द्विमितीतून - त्रिमितीय भूमितीचा अभ्यास सहजपणे प्रगत केला. पण काही वैज्ञानिकांना चतुर्थमिती, पंचमिती या अवकाशातील भूमितीची गरज भासू लागली. हा अभ्यास मग n मितीपर्यंत (n ही नैसर्गिक संख्या आहे) सदिश (Vector) या संकल्पनेतून प्रगत केला. बनाक आणि हिलबर्ट या शास्त्रज्ञांनी अमूर्त गृहितकांच्या सहाय्याने हा अभ्यास अनंतमितीपर्यंत वाढवला.

तोपर्यंत भूमितीत युक्लिडीय अवकाश (Euclidean space) लोकांना माहीत होती. बनाक व हिलबर्ट यांच्या शोधामुळे बनाक अवकाश (Banach space), हिलबर्ट अवकाश (Hilbert space) अशा अमूर्त अवकाशामध्ये भूमितीचा अभ्यास प्रगत झाला. अमूर्त अवकाश गणितज्ञांनी निर्माण केले. ही केवळ बौद्धिक कसरत असावी असे वाटण्याचा संभव आहे पण तसे झाले नाही. गणितातील काही अनिर्णयीत प्रश्न, शंका यामुळे मार्गी लागल्या.

आपण राहतो ती पृथ्वी जवळजवळ गोलाकृती आहे. त्यामुळे जहाज, विमान, रस्ते यांचे मार्ग सरळ रेषेत नसतात. या सर्व मार्गांना वक्रता असते. त्यामुळे गोलावरील भूमितीचा शोध घेणे गरजेचे ठरले. या भूमितीला गोलाध्याय (spherical Geometry) असे म्हणतात. या भूमितीत असणाऱ्या काही गंमती, वेगळेपणा दाखवण्यासाठी खाली दोन उदाहरणे दिली आहेत.

दोन शहरे रस्त्याने जोडली की त्यांच्यामधील अंतर किलोमीटर या एककाने मोजले जाते. उदाहरणार्थ : मुंबई ते पुणे हे अंतर 190 किलोमीटर आहे. हे अंतर पृथ्वीवर काढलेल्या वक्र मार्गाने दाखवता येते. हे अंतर दोन शहरांना जोडणाऱ्या सरळ रेषेतील नाही. पण दोन शहरे समुद्र मार्गाने जोडली गेली तर मात्र दोन बिंदूंमधील अंतर मोजण्यासाठी किलोमीटर हे अंतर उपयोगी होत नाही. हे अंतर मोजण्यासाठी नॉटिकल किलोमीटर (knotical kilometers) हे एकक वापरतात.

सोईसाठी काही प्रमाणे खाली दिली आहेत.

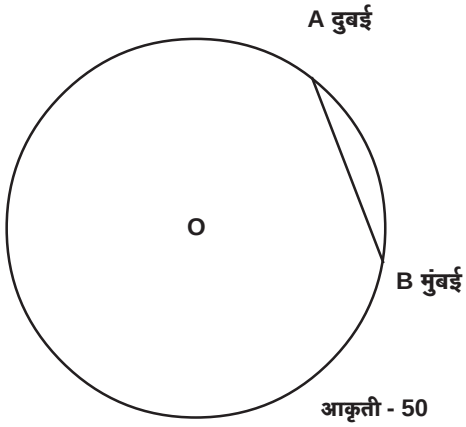
1 किलोमीटर = 3280 फूट,

1 नॉटीकल किलोमीटर = 3800 फूट,

1 मैल = 1.61 किलोमीटर = 5280 फूट,

1 नॉटीकल मैल = 6080 फूट,

ही प्रमाणे सुमारे आहेत.



आकृती - 50

आपल्याला पृथ्वीची त्रिज्या माहीत आहे.

या संख्येचा उपयोग करून पृथ्वीगोलावरील वक्रीय अंतर मोजता येते.

पुढील गोलाकृतीत पृथ्वीवरील वक्रमार्ग दाखवला आहे.

या आकृतीत A आणि B ही दोन शहरे दुबई आणि मुंबई दाखवली आहेत. यांना जोडणारा समुद्र मार्ग AB हा पृथ्वीच्या पाठीवर असल्याने तो वक्र आहे. युक्लिडच्या भूमितीप्रमाणे तो AB या सरळ रेषेवरून मोजता येणार नाही. हा मार्ग पृथ्वीच्या पोटातून जाणारा होईल व ही संकल्पना शक्य नाही.

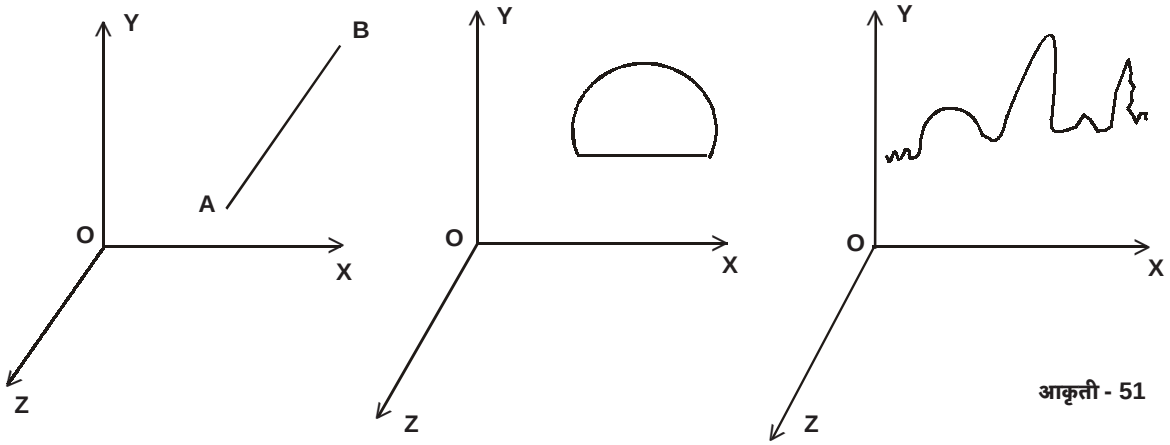
आता जगातील तीन शहरे - न्यूयॉर्क, मॉस्को आणि मुंबई - विचारात घेऊ. ही तीन शहरे जोडणारे विमानाचे मार्ग दाखवले की एक त्रिकोण तयार होईल. हा त्रिकोण अंतराळात लटकलेला असेल व त्याच्या भुजा वक्र आकाराच्या असतील. अशा त्रिकोणातील कोनांची बेरीज 180^0 पेक्षा मोठी तर 540^0 पेक्षा लहान असते असे या भूमितीत सिद्ध करता येते. थोडक्यात युक्लिडची भूमिती गोलाध्यायात (Spherical Geomtry) काही वेळा निरूपयोगी ठरते. कागद वापरून प्रतलावर त्रिकोण काढला तर दोन बिंदूना जोडणारा सरळ मार्ग व पृथ्वीच्या पृष्ठभागावर तेवढ्याच अंतराचा काढलेला मार्ग जवळजवळ सारखा असतो. म्हणून युक्लिडची भूमिती कागदावर म्हणजे एकाच प्रतलावर काढलेल्या आकृत्यांसाठीच उपयुक्त ठरते. कागदाचा प्रतल व पृथ्वीचा तेवढ्याच आकाराचा भाग यात अतिसूक्ष्म फरक पडतो. हा फरक दुर्लक्षित करण्याएवढा असतो.

आता वर दिलेली तीन शहरे वक्र मार्गाने पृथ्वीच्या पृष्ठभागावर एकमेकांना जोडली तर पृथ्वीवरील हा त्रिकोण त्रिमितीत दाखवता येतो. पृथ्वीवरील सर्व देश भिंतीवर लावलेल्या नकाशातही दाखवले जातात यासाठी हा भिंतीवर लटकवलेला नकाशा

त्रिमितीतून द्विमितीत आणावा लागतो. आता द्विमितीत वर नोंदलेली शहरे कशी दाखवावीत हा प्रश्न आला. यासाठी भूगोलातील गणिती पद्धत निश्चित करावी लागली. यासाठी प्रक्षेपित भूमिती (Projective Geometry) हा विषय अभ्यासावा लागतो. भूमितीसाठी हे कार्य शास्त्रज्ञांनी योग्य पद्धतीने पार पाडले व पृथ्वीचा गोल भिंतीवरील नकाशात दाखवता आला.

पृथ्वीचा गोल त्यामानाने आकाराच्या संदर्भात पुष्कळच सुसम आहे. अनेक गणितीय सूत्रे अशा अभ्यासासाठी शोधून काढली आहेत. आपण आता एक ओबडधोबड दगड विचारात घेऊ व या दगडावर खडू वापरून एखादी वक्र असलेली आकृती काढू. आता हे चित्र कागदावर रेखाटायचे असेल तर परिवर्तनासाठी लागणारी प्रक्षेपित भूमिती किती प्रगत असावी लागेल याची कल्पनाच करावी लागेल. यासंबंधी लागणारी गणितीय सूत्रे शोधणे जवळजवळ अशक्य आहे. पण काही प्रमाणात आता सोयी वाढल्या आहेत. आता निरनिराळ्या प्रकारचे कॅमेरे पण उपलब्ध होऊ लागले आहेत. थोडक्यात कॅमेरा या यंत्राचा शोध प्रक्षेपित भूमितीशी निकटचा संबंध ठेऊन आहे. सूर्यप्रकाशात चालत असताना आपल्यामागेच चालत असलेली सावली पहावी. म्हणजे अशा भूमितीची ओळख आपल्याला लवकर पटेल. वर दिलेली दोन्ही उदाहरणे प्रगत युक्लिडीय भूमिती प्रकारांतील आहेत.

भूमितीच्या वर केलेल्या चिंतनातून मग काही गणितज्ञांनी भूमितीविषयी अनेक संकल्पना आणखी प्रगत केल्या. एखादा खडबडीत, डोंगराळ, चढउतारांचा प्रदेश नियोजनासाठी आकृतीबद्ध करायची असेल तर कोणती भूमिती उपयोगी होईल हा विचार पुढे आला. खालील आकृत्या-51 पहा.



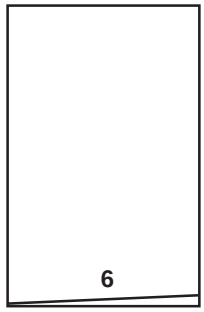
आकृती - 51

त्रिमितीत काढलेल्या या तीन आकृतीतून निरनिराळी वक्रता दाखवली आहे. पहिल्या चित्रात A पासून B पर्यंत जाणारा सरळ सपाट रस्ता प्रतलावर दाखवला आहे. दुसऱ्या चित्रात एक उंचवटा आलेला वक्र स्वरूपाचा आकार दाखवला आहे तर तिसऱ्या चित्रात डोंगरांची रांग, उंच व खोल दऱ्याखोऱ्यांचा प्रदेश दाखवला आहे. या तिन्ही चित्रांतील प्रदेश एकाच समतल कागदावर रेखाटायचा आहे.

या रेखाटनासाठी आपल्याला निरनिराळ्या वक्र आलेखांची, वळणे, खोली, उंची यांचा त्रिमितीत संख्यात्मक अभ्यास करावा लागेल. येथे काही वळणे विचित्र अवस्थेतही असतील. पण आता यापैकी बरीच रचना गणितीय पद्धतीने सांगता येते. न्यूटन व लेबनीज या 17 व्या शतकातील दोन शास्त्रज्ञांनी कलनशास्त्र (Calculus) या गणिताच्या शाखेचा शोध लावला. या शोधामुळे गणितात क्रांती झाली असे म्हणता येईल. एखाद्या खडबडीत आकारातील वस्तूमध्ये असलेले चढउतार, उंची, खोली यांचा आता शोध घेता येऊ लागला. त्यामुळे प्रतलावर अशा वस्तूंचे (डोंगरातील दऱ्या-खोरे, सुळके) आता चित्रांकन करणे शक्य झाले. अशी विविधता गणितीय पद्धतीने अभ्यासणारी शाखा म्हणजे कलन-भूमिती (Differential Geometry) होय.

भूमिती निरनिराळ्या आकारांचा शोध घेते. विश्वात अनेक वस्तू आहेत व त्यांचा आकार भूमितीच्या माध्यमातून समजून घेता येतो. या विभागात काही थोड्या वस्तूंचे आकार लक्षात घेतले आहेत.

शाळेत शिक्षणाला सुरूवात केल्यापासून आपण पुस्तक वापरायला सुरूवात करतो. या पुस्तकाच्या आकाराकडे आपण कधी निरखून पाहिले आहे का ? आपण जी पुस्तके हाताळतो त्यापैकी बहुतेकांचा साधारण आकार खालील आकृत्या-52 मध्ये दाखवला आहे :



पुस्तकाचा आकार

अर्थात सर्वच पुस्तके याच आकाराची असतात असे ठासून सांगायचे नाही. हा आकार लंब-चौकोनाचा आहे. एक मात्र खरे की अगदी चौरस आकारात छापलेली पुस्तके अगदी क्वचितच आढळतील. वर काढलेला चौकोन अंदाजे 6 : 10 या आकाराचा आहे. आपण वापरतो त्या वहीचा आकारही लंब-चौकोनासारखा असतो. (चौरस नसतो) घरात भिंतीवर लावलेले फोटो, भिंतीवरच लटकवलेली कालदर्शिका अल्बम मध्ये चिकटवलेले फोटो, आपल्या दप्तराचा आकार, घराच्या खिडक्यांचे आकार, जेवणाच्या, अभ्यासाच्या टेबलांचा आकार लंब-चौकोनाच्या आकृतीसारखे असतात. (सहसा चौरस नसतात.) व्यवहारात आपण ज्या चौकोनी वस्तू वापरतो त्यापैकी बहुतेक वस्तू लंब-चौकानाकृती असतात.

शास्त्रज्ञांनी आता अशा अनेक लाख वस्तूंची नोंद केली आहे येथे फक्त काही नावे दिली आहेत.

माणसाच्या शरीरातील अनेक अवयवात 6 : 10 प्रमाण आढळून आले आहे. उदाहरणार्थ माणसाच्या कंबरेपासून खांद्यापर्यंत शरीर रचना लक्षात घेतली तर एक चौकोन लक्षात येतो. हा चौकोन 6 x 10 या स्वरूपाचा असेल तर तो सुडौल असल्याचे आपल्या लक्षात येते. बुटक्या माणसाच्या बाबतीत हा चौकोन चौरसाकडे झुकतो तर अति उंच असणारा माणसात हे 6 : 10 प्रमाण फिसकटलेले असते. इटालियन गणितज्ञ फिबोनाकी याने प्रथमच 6 : 10 हे प्रमाण महत्वाचे असल्याचे शोधून काढले.

ला व्हिन्सी या कलाकाराने आपल्या पेंटिंगमध्ये या प्रमाणाचा उपयोग करून घेतला व तो जगप्रसिद्ध झाला.

आता आपण भूमितीतील या प्रमाणाचे गणित समजून घेऊ. AB या आकाराची रेषा घ्या.



आकृती - 52

AB या रेषेवर C बिंदू असा घेऊ की $\frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AC}$

हे प्रमाण सिद्ध होते. आता समजा AB = 1 आणि AC = x आहे तर CB = 1 - x होय. वर घेतलेले प्रमाण $\frac{x}{1} = \frac{1 - x}{x}$

असे लिहिता येईल. यावरून आपण x ची किंमत काढू. येथे $x^2 + x - 1 = 0$ हे समीकरण सोडवून आपल्याला $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ ही

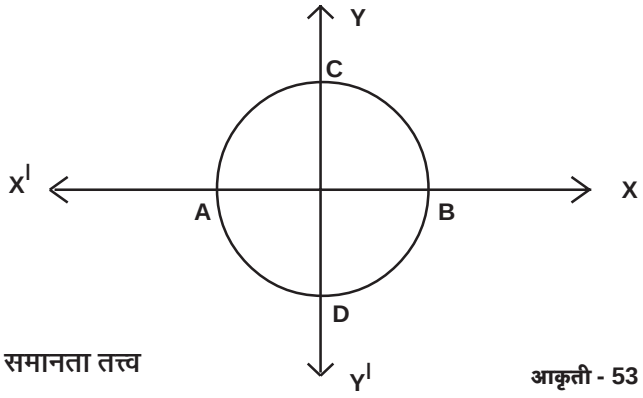
किंमत काढता येते. गणकयंत्र वापरून $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0.6180339 = 0.6$ किंवा 6/10 आहे.

या 6 : 10 प्रमाणाबद्दल अगदी प्राचीन काळापासून अनेक तत्वज्ञ, कलाकार, गणितज्ञ कुतुहल व्यक्त करीत असत. हे प्रमाण 'ईश्वरी' आहे असे अनेक ग्रंथातून त्यांनी नमूद केले आहे. या प्रमाणाला 'सोनेरी प्रमाण' (Golden Ratio) अथवा रम्य गुणोत्तर असेही म्हटले आहे. याला 'रम्य गुणोत्तर' असेही म्हणतात. या प्रमाणासंबधी आता काही ग्रंथ लिहिले आहेत तर अमेरिकेतून या प्रमाणाचा खोलवर शोध घेणारे Fibonocci Quarterly या नावाचे नियतकालिक प्रसिद्ध होते.

आपल्या प्रत्येकाच्या घरात आरसा (Mirror) असतोच. त्याचा उपयोग कुटुंबातील सर्वच माणसे दिवसातून काही वेळा करतात. काहींना तर आरशात डोकावण्याचा छंदच असतो. आरसा प्रतलासमान असेल तर आपल्याला चांगले प्रतिबिंब दिसते. गणिताच्या

भाषेत आरशात पहाणे म्हणजे स्वत: (I) व आरशातील प्रतिबिंब समजा A आहे. आरसा जर उत्तम प्रतल असेल तर प्रतिबिंबाचे प्रतिबिंब म्हणजेच $A^2 = I$ होय. खरे तर प्रतिबिंबाची हीच गणितीय व्याख्या करता येईल. येथे स्वत: व प्रतिबिंब यात एकवाक्यता किंवा समानता तत्व लक्षात येते. ही एकरूपता हे एक भूमितीय तत्व आहे.

विविध कारणांनी वर्तुळाकृतीचा उपयोग कलात्मक व्यवहारात जास्त केला जातो. कारण सौंदर्य शास्त्रात एकवाक्यता - समानता - प्रमाणबद्धता - बांधेसूदपणा या गणितीय - भूमितीय तत्वाना महत्वाचे स्थान आहे. खाली दिलेली वर्तुळाकृती पहा :



समानता तत्त्व

आकृती - 53

वरील आकृतीत 'समानता तत्व' (Symmetry) तंतोतंत भरलेले लक्षात येते. अर्धवर्तुळे ACB व ADB ही X अक्षात प्रतिबिंबे आहेत. तसेच अर्धवर्तुळे CBD आणि CAD ही Y - अक्षात प्रतिबिंबे आहेत. प्रत्येक व्यास रेषेला असाच संबंध व्यक्त करता येईल. येथे अनेक प्रकारची प्रतिबिंबित - समानता (Mirror Symmetry) दाखवता येते. $A \rightarrow D$, $D \rightarrow B$, $B \rightarrow C$ आणि $C \rightarrow A$ ही वर्तुळीय परिवर्तन समानताही (rotational Symmelry) अस्तित्वात आहे. हे तत्वही वर्तुळावरील प्रत्येक बिंदूला लाभले आहे. त्यामुळेच सोन्या-मोत्यांचे दागिने करताना वर्तुळ हा भूमितीय आकार मोठ्या प्रमाणात वापरला जातो. सोन्यात मढवलेला मोत्याचा हार स्त्रिया गळ्यात घालतात तेव्हा प्रतिबिंबित समानता, परिवर्तन समानता अशी तत्वे या दागिन्यात पहायला मिळतात. मोत्यांच्या आकारात असलेली समानता, एकवाक्यता, प्रमाणबद्धता, बांधेसूदता ही सोनाराने उपयोजिलेली ही तत्वे त्यामुळे हाराचे सौंदर्य व त्या बरोबरच स्त्रीचे सौंदर्यही वाढवतात. अलंकारातून दडलेली ही कला Ornamental Symmetry म्हणून ओळखली जाते.

आपले शरीरही या प्रतिबिंबित समानतेचे एक उदाहरण आहे. यात शरीराचा डावा आणि उजवा भाग समाविष्ट होतो. शरीरात चेहऱ्यावर नाक हा अवयव सर्वात ऊंच अवयव असतो. समानता तत्व अनुभवण्यासाठी आपल्याला मध्य अक्षाची गरज असते. ही रेषा स्वाभाविकच (प्रत्यक्ष न काढता) नाकावरून काढली जाते. या अक्षावरूनच शरीरातील समानता तत्व जोखता येते. आपल्या संस्कृतीत मुलीचे सौंदर्य वर्णन करताना 'तिचे नाक चाफेकळीसारखे सरळ आहे' असे म्हटले जाते, ते यामुळेच. नाकाच्या रेषेवरून काना-गालापर्यंत ओघळणारी वक्रता मग अधिक रेखीव आणि स्पष्ट बनते. बेढब नाकाची माणसे यामुळेच समानता तत्वाला मुकतात.

अशा भूमितीय आकारांचे ज्ञान करून घेण्यासाठी आता ग्रंथ उपलब्ध आहेत.

भूमितीची उत्क्रांत प्रगती आता नैसर्गिक भूमिती (Natural Geometry), Fractal भूमिती, Neural Networks, DNA maps, अशा विषयातून प्रगत होत आहे.

या विभागाच्या शेवटी भूमितीतील द्वैत सिद्धांत (Duality Principal) याचे एक उदाहरण देऊन हा विषय संपवू.

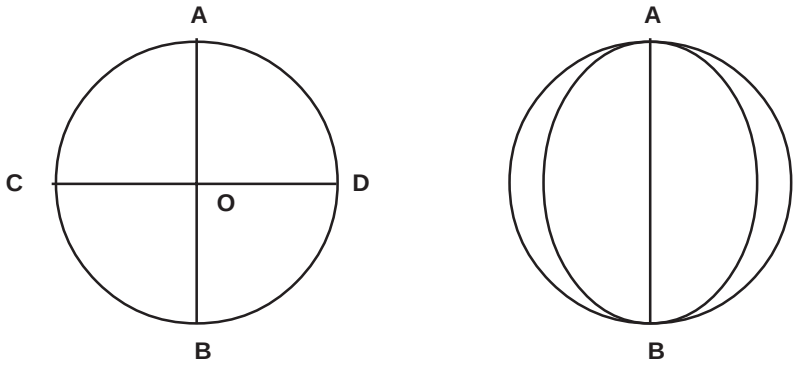
या पुस्तिकेतील पहिल्या विभागात बिंदू आणि रेषा यांचे संबंध द्वैत-स्वरूपाचे आहेत असे म्हटले होते. (पहा : आकृती - 4 व 5)

(1) दोन बिंदूमुळे एकच रेषा निश्चित होते.

(2) परस्परांना छेदणाऱ्या दोन रेषेवर एकच बिंदू असतो

असे हे संबंध आहेत. युक्लिडीय भूमिती या संबंधावर आधारित आहे. येथे आपण बिंदू आणि रेषा यांच्या व्याख्या योजल्या होत्या.

उत्क्रांत भूमितीत आता मूलभूत संज्ञांच्या व्याख्याच करत नाहीत. त्यांच्यामधील संबंध दिले जातात त्यांना ग्रहिते (axioms, propositions) म्हणतात. या आधारावर मग विषय पुढे फुलत जातो. या विषयाला मग अमूर्त स्वरूप प्राप्त होते. पण काहीवेळा विश्वातील एखादे कोडे, प्रश्न सोडवण्यासाठी असे अमूर्त विषय उपयुक्त ठरतात. यासाठी खाली एक उदाहरण दिले आहे. समजा बिंदू व रेषा या संज्ञांच्या व्याख्या दिलेल्या नाहीत. आणि वर नोंदलेली गृहिते (1 व 2) त्यांचा संबंध स्पष्ट करतात. आता खाली दिलेली आकृती पहा :



आकृती - 54

वर काढलेल्या आकृती-54 मध्ये एक गोल काढला आहे. AB व CD हे या गोलाचे दोन व्यास आहेत. ABCD हे या गोलाचे एक अतिवर्तुळ (Great Circle) आहे. (या वर्तुळाचा केंद्रबिंदू व गोलाचा मध्यबिंदू एकच असतो) ABCD या चार बिंदूतून जाणारे फक्त एकच वर्तुळ असते. दुसऱ्या आकृतीत दोन अशीच अतिवर्तुळे दिली आहेत या दोन वर्तुळांचा व्यास AB आहे. दोन अतिवर्तुळामुळे फक्त एकच व्यास निश्चित होतो. आता आपण

व्यास = बिंदू

अतिवर्तुळ = रेषा

अशी कल्पना करू. येथे बिंदू आणि रेषा यांची चित्रे आपण दुर्लक्षित करू. वर दिलेल्या समानतेतून खाली दिलेली द्वैत गृहितके निश्चित करता येतात.

(1) दोन बिंदूमुळे (व्यासामुळे) एकच रेषा (अतिवर्तुळ) निश्चित होते.

(2) दोन रेषांमुळे (अतिवर्तुळामुळे) एकच बिंदू (व्यास) निश्चित होतो.

हे बदल केल्यावर एक नवीनच भूमिती तयार होते हे सहज लक्षात येते. या उदाहरणावरून लक्षात येते की वरील गृहिते युक्लिडीय भूमिती सारखीच आहेत. या द्वैतातून भूमितीच्या जाणीवा मात्र विस्तृत झाल्या आहेत. अशा अमूर्त स्वरूपातून भूमितीची बाग विविध प्रकारे फुलत जाते.

आता शेवटी मला एवढेच सुचवायचे आहे. सर्व विश्वात गणित तत्व तुडुंब भरले आहे. डोळसपणे या विश्वाकडे, त्यातील सृष्टीकडे, वस्तूंकडे पाहत राहा. परिणामी तुम्हाला येथील गणितत्वाचा बोध होईल. नवनिर्मितीचा आनंद अमर्याद असतो.

❑ ❑ ❑

अक्षरजुळणी
टाईप इनोव्हेटर्स, सातारा. फोन :- (02162) 234372

© वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ, वाई

संपादक
नागेश शंकर मोने

संपादन साह्य
श्री. अरूण सावंत
श्री. भगवान भुजबळ
सौ. अनुराधा जोशी

प्रकाशक
श्री.दिनकर वि. फरांदे
अध्यक्ष, वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ
वाई

प्रकाशन वर्ष
18 सप्टेंबर 2008

लेखक
प्रा.डॉ.सदाशिव देव
12, प्रेसी बिल्डींग,
मळा पणजी : 403001, गोवा.
दूरध्वनी - (0832)-2225816

मूल्य रूपये - 50/-

प्रस्तुत पुस्तिका तयार करण्याच्या कामात डॉ.श्री.रवींद्र कुलकर्णी, पुणे यांनी व त्यांच्या ट्रस्टने केलेल्या आर्थिक मदतीमुळेच, अल्प किमतीत ही पुस्तिका आपल्यापर्यंत येत आहे.

वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ, वाई

१.	मिश्र संख्या	- प्रा.म.रा.राईलकर	१५.००
२.	विभागणी व तिची भावंडे	- डॉ.व.ग.टिकेकर	१५.००
३.	गणिती युक्तिवाद	- प्रा.य.ना.वालावलकर	१५.००
४.	गणित मौज	- श्री.ना.शं.मोने	१५.००
५.	कोनाचं त्रिभाजन	- प्रा.म.रा.राईलकर	१५.००
६.	संख्यानगरीत भटकंती	- श्री.पी.के.श्रीनिवासन् अनुवाद : डॉ.मधुकर देशपांडे	२०.००
७.	गणितातील कयास, खरे व चुकलेले	- डॉ.व.ग.टिकेकर	२०.००
८.	क्षेत्रफळ आणि घनफळ, काही तात्त्विक पैलू	- डॉ.रवींद्र बापट	२०.००
९.	ऋण संख्या	- प्रा.म.रा.राईलकर श्री.ना.शं.मोने	२०.००
१०.	भूमितीय रचना	- श्री.ना.शं.मोने	२०.००
११.	सममिती आणि इतर	- प्रा.म.रा.राईलकर	२०.००
१२.	दिनदर्शिकेमधली जादू	- श्री.पी.के.श्रीनिवासन अनुवाद : डॉ.मधुकर देशपांडे	२०.००
१३.	एकाच माळेचे मणी	- श्री.ना.शं.मोने	२०.००
१६.	दोन मुलाखती	- संकलन : श्री.ना.शं.मोने	२०.००
१७.	गणितींचे किस्से	- डॉ.व.ग.टिकेकर	२०.००
१८.	निर्देशक भूमिती	- प्रा.म.रा.राईलकर	२०.००
१९.	त्रिकोण नगरीसह भूमितीची विविधता	- प्रा.डॉ.सदाशिव देव	५०.००
२०.	संख्यामालिका	- श्री.दिलीप गोटखिंडीकर	४०.००
२१.	अपूर्णांक : आजीकडून शिका (सी.डी.)	- प्रा.म.रा.राईलकर	४०.००
२२.	कापा आणि जोडा (सी.डी.)	- प्रा.म.रा.राईलकर	५०.००

गणित अध्ययन - अध्यापन - विकसन संस्था, नाशिक

१.	M.T.S. / N.T.S. व अन्य स्पर्धांसाठी गणित प्रश्नसंग्रह	- श्री.ल.म.भुजबळ, देवळाली कॅंप	१००.००
२.	Question Bank (Mathematics) For M.T.S. / N.T.S. and other competitive examinations.	- L.M.Bhujbal, Bhas Bhamre,Nasik	100.00
३.	गणित मोती - विचारांना चालना देणारे गणित विषयक लेख	- डॉ.व.ग.टिकेकर,	४५.००
४.	जलद आकडेमोडीच्या १३ युक्त्या	- मूळ लेखक-श्री.दत्तात्रय कापरेकर, अनुवाद : श्री.दिलीप गोटखिंडीकर	२५.००
५.	**गणित : छंद-आनंद** त्रैमासिक	(वार्षिक वर्गणी)	७५.००
१.	गणित गुणगान	- श्री.ना.शं.मोने	५०.००
२.	उत्तरातून प्रश्ननिर्मिती (८ वी, ९ वी, १० वी साठी) भूमितीविषयक प्रश्नांची विशेष चर्चा.	- श्री.ना.शं.मोने	१२५.००
३.	विज्ञान म्हणजे काय ?	- श्री.ना.शं.मोने	५.००
४.	शैक्षणिक संदर्भ : विज्ञान विषयक द्वैमासिक	(वार्षिक वर्गणी)	१२५.००

सर्व पुस्तकांसाठी श्री.ना.शं.मोने, ११२३, भाग्योदय, ब्राह्मणशाही, वाई.
दूरध्वनी : (०२१६७) २२०७६६. मोबाईल : ९२२६२८३२०३. यांच्याशी संपर्क साधावा.

लेखकाविषयी :

प्रा.डॉ.सदाशिव देव

- विद्यावाचस्पती पदवी
- पदव्युत्तर गणित विषयाचे प्राध्यापक, संशोधक, मार्गदर्शक.
- भारत, कॅनडा आणि अमेरिका येथे नोकरी.
- पदव्युत्तर गणित ग्रंथांचे लेखक.
- निरनिराळ्या संस्थांचे आजीव सदस्य.
- महाराष्ट्र गणित शिक्षक परिषदेचे अध्यक्ष (१९९०)
- मराठी भाषा : साहित्यिक, लेखक आणि संशोधक.

पुस्तिका क्र. 19

वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ, वाई

द्वारा : श्री.ना.शं.मोने, 1123, भाग्योदय, ब्राह्मणशाही, वाई - 412 803.
दूरध्वनी : (02167) 220766, Email : nagesh.mone@gmail.com